UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
MATO GROSSO DO SUL

Matemática, Licenciatura

Leonardo Meira Tomaelo

Dinâmica das Funções Afim e Tenda e suas Iterações

Nova Andradina-MS
2022

Leonardo Meira Tomaelo

Dinâmica das Funções Afim e Tenda e suas Iterações

Orientador: Prof°. Dr. Fábio Rodrigues Lucas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Matemática, Licenciatura da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciando em Matemática.

Nova Andradina-MS
2022

Tomaelo, Leonardo Meira
Dinâmica das funções afim e tenda
Leonardo Meira Tomaelo – Nova Andradina, MS:
UEMS, 2018.
73 66p. :il

Monografia (Graduação) - Matemática, Licenciatura -
Univesidade Estadual de Mato Grosso do Sul, 2018.
Orientador: Prof°. Dr. Fábio Rodrigues Lucas.

1. Mineração de dados. 2. Aprendizado de máquina.
3. Mineração de dados educacionais 4. Análide de dados educacionais.

Leonardo Meira Tomaelo

Dinâmica das Funções Afim e Tenda e suas Iterações

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Matemática, Licenciatura da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciando em Matemática

Membros da banca:

Prof°. Dr. Fábio Rodrigues Lucas
UEMS – Nova Andradina

Prof°. Dr. Oyran Silva Rayzaro
UEMS – Nova Andradina

Prof°. Dr. Danilo Antonio Caprio
UEMS – Nova Andradina

Dedico este trabalho a minha avó Catarina que Deus a tenha, irei sempre te amar.
Agradeço a todos, Obrigado.

Agradecimentos

A Deus por ter me dado saúde, força para superar as dificuldades as vitórias e conquistas alcançadas durante a minha vida.

Agradeço a minha mãe Hozana, minha avó Maria e Maria clara mulheres que me deram apoio, incentivo nas horas difíceis, de desânimo e cansaço, amo vocês.

Ao Prof. Fábio por total apoio e disponibilidade de me orientar e tornar este fato possível, agradeço de coração, obrigado por acreditar em mim.

Ao Prof. Me. Márcio pela confiança em mim depositada. Agradeço por ter acreditado no meu potencial e por todas as oportunidades que me deu.

A esta universidade, seu corpo docente, direção e administração que fez isto se realizar.

Agradeço a todos os professores por me proporcionar o conhecimento não apenas racional, mas a manifestação do caráter e afetividade da educação no processo de formação profissional, por tanto que se dedicaram a mim, não somente por terem me ensinado, mas por terem me feito aprender.

A todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

Resumo

Neste trabalho abordamos a dinâmica das funções afim e tenda e analisamos suas iterações e órbitas, utilizando como ferramenta o programa computacional wxMaxima, na resolução de problemas e representação gráfica.

A composição de funções base dos Sistemas Dinâmicos Discretos, permite a obtenção de modelos que descrevem bem este tipo de sistema, que são bastantes "Discretos", o que se estuda nesta teoria, já que auxilia bastante na descrição de vários fenômenos, por exemplo, o crescimento de uma determinada população, ou até mesmo uma aplicação financeira.

Palavras–chave: Sistemas Dinâmicos Discretos, Função Afim, Função Tenda.

Abstract

In this work we approach the dynamics of the affine and tent functions and analyze their iterations, using the computer program wxmaxima as a tool for problem solving and graphical representation.

The composition of base functions of discrete dynamical systems, allows obtaining models that describe well this type of system, which are quite "Discrete", which is studied in theory, since it helps a lot in the description os several phenomena, for example, the growth os a certain population, or even a financial investment.

Keywords: Discrete Dynamic Systems, Affine Function, Tent Function.

Sumário

Introdução **9**

1 Introdução ao wxMaxima **10**

1.1 Comandos Básicos 11

1.2 Pacote Dynamics 11

2 Sistemas Dinâmicos Discretos **14**

2.1 Iteração 14

2.2 Pontos Fixos, Pontos Periódicos e Órbitas 14

2.3 Fórmulas de Recursão 15

3 Dinâmica da Função Afim **18**

3.1 Iterações e Representações Gráficas 18

4 Dinâmica da Função Tenda **20**

4.1 Iterações e Representações Gráfica 21

Considerações Finais **24**

Referências Bibliográficas **25**

Introdução

O objetivo dos sistemas dinâmicos é descrever um estado ao longo do tempo. Vamos investigar a dinâmica de um sistema dinâmico discreto. Esse sistema é um procedimento iterativo de uma função contínua com algum valor inicial. Os sistemas dinâmicos discretos podem exibir uma diversidade de comportamentos dinâmicos, como oscilações periódicas e caos, porém, para que se tenha caos é preciso que essas equações sejam não lineares.

Um sistema dinâmico discreto pode ser visto como um par (X, f) onde X é um conjunto não vazio e $f : X \longrightarrow X$ é uma aplicação. Um dos interesses da área de sistemas dinâmicos é o estudo assintótico das órbitas dos pontos x de X, isto é, o comportamento dos conjuntos $O(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$.

Neste trabalho vamos estudar o conceito de funções iteradas sendo elas a função afim e tenda. Para realização deste conceito vamos utilizar a ferramenta computacional matemática wxMaxima, um software gratuito que para além de números, permite manipular equações algébricas com variáveis indeterminadas. Através do wxMaxina, iremos observar o comportamento das órbitas das funções afim e tenda.

O trabalho foi estruturado da seguinte maneira: No primeiro capítulo está uma breve apresentação sobre o software wxMaxima. A seguir vamos estudar os sistemas dinâmicos discretos e a dinâmica da função afim e tenda com o objetivo de analisar suas órbitas e forma gráfica. Faremos sua representação gráfica com a utilização do software Máxima, mostrando que as órbitas de tais mapas não apresentam complexidade. Em seguida, vamos mostrar que os sistemas não lineares têm um comportamento complexo e podem conduzir a órbitas caóticas.

Capítulo 1

Introdução ao wxMaxima

Neste capítulo daremos uma breve introdução sobre o software Maxima.

De acordo com villatte(2006,p.1, p.2)

> O Maxima é um sistema de software na categoria dos sistemas designados de CAS (Computer Algebra System), nomeadamente, sistemas que para além de números, permitem manipular equações algébricas com variáveis indeterminadas. O Maxima pode realizar muitas operações com funções matemáticas, incluindo derivação, primitivação, aproximação com séries de potências, transformadas de Laplace, resolução de sistemas de equações lineares, e realização de gráficos em duas e três dimensões, entre outras.

Ao se inciar o Maxima, nos deparamos com a tela incial representada na **Figura 1.1**

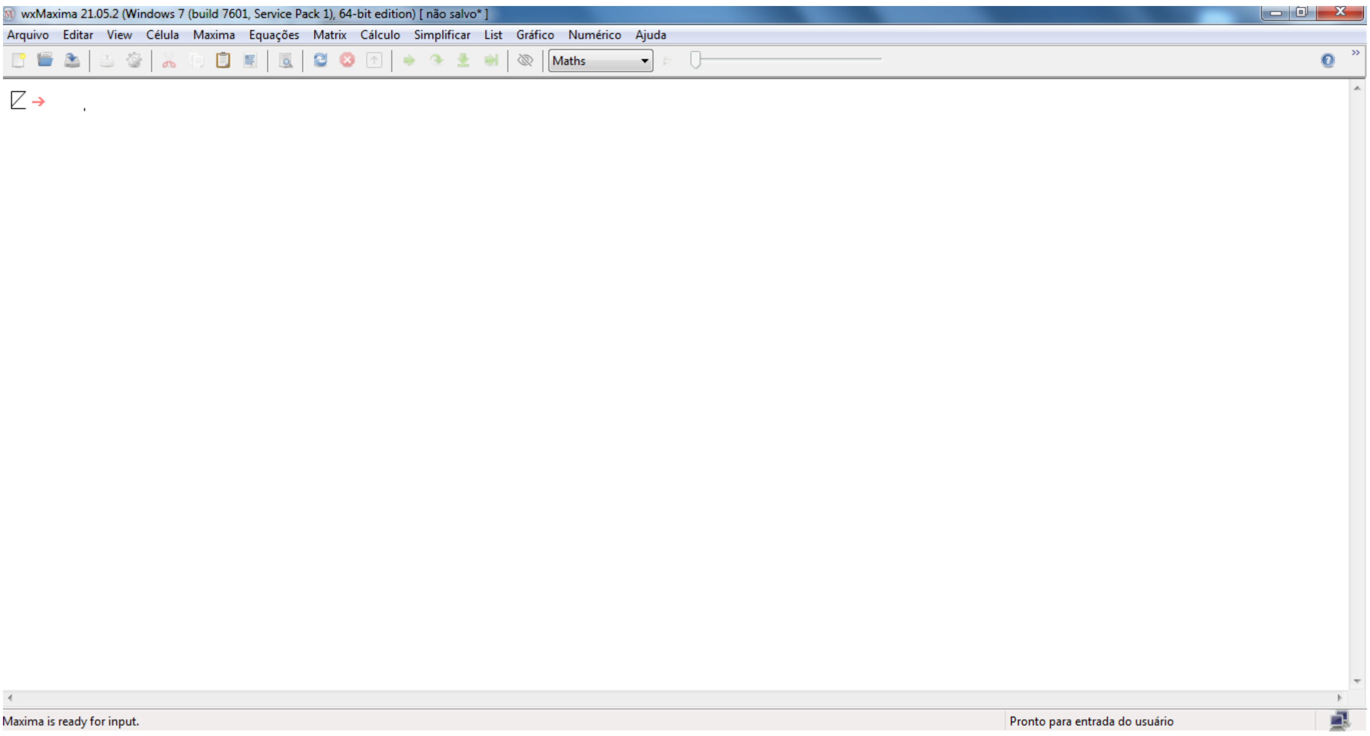

Figura 1.1: Tela inicial do wxMaxima

Inicie o wxMaxima com o **Enter**. Termine cada comando com **ponto e vírgula** para o software compilar pressione as teclas **(Shift + Enter)** e obterá o resultado da operação. Quando se inicia uma sessão aparece um símbolo $(\%i1)$ e reinicia cada comando com $kill(all)$; veja na **Figura 1.2**.

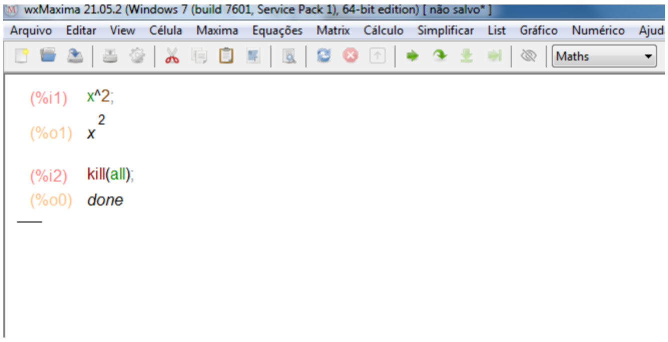

Figura 1.2: Os símbolos $(\%i1)$,$(\%i2)$,$(\%i3)$ ... representam os comandos inseridos pelo utilizador, e as respostas são obtidas a cada comando representam-se por $(\%o1)$,$(\%o2)$,$(\%o3)$ ...

1.1 Comandos Básicos

Os botões abaixo na **Figura 1.3** correspondem às operações, respectivamente: abrir, salvar, criar um novo documento, imprimir, configurações, cortar seleção, copiar seleção, localizar ou substituir, interromper calculo atual, entre outras. .

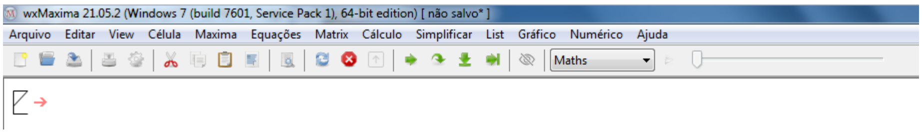

Figura 1.3: Barra de tarefas

As operações aritméticas adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação são representadas por $+, -, *, /$ respectivamente. Os espaços não são necessários e as letras devem ser minúsculas.

1.2 Pacote Dynamics

O pacote adicional dynamics inclui várias funções para criar diversas representações gráficas de sistemas dinâmicos e fractais. Para estar usando as funções do mesmo, precisa estar carregado com comando **load(dynamics);**.

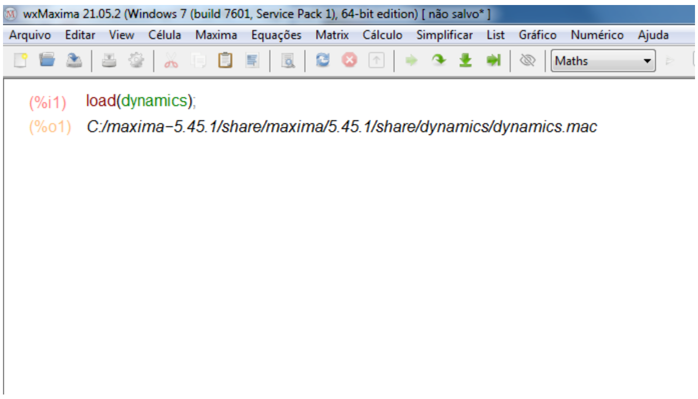

Figura 1.4: Ativação do Pacote Dynamics

Neste trabalho estaremos utilizando com frequência duas funções do **Pacote dynamics** mais conhecidas como, **evolution** e **staircase**:

Exemplo 1. *Veja o seguinte exemplo introduzido ao Maxima:*
$(\%i1)$ $kill(all);$
$(\%i2)$ $f(x) := x^2 - 1;$
$(\%i3)$ $x0 : 1;$
$(\%i4)$ $x1 : f(x0);$
$(\%i5)$ $evolution(f(y), 1, 5);$
$(\%i6)$ $staircase(f(x), 1, 5);$

Função evolution: Desenha $n+1$ pontos num gráfico bidimensional (série de tempo), onde as coordenadas horizontais dos pontos são números inteiros $0, 1, 2 \ldots, n$, e as coordenadas verticais são valores de $y(n)$ correspondentes, obtidos a partir da relação de recorrência

$$y(n+1) = F(y(n)) \tag{1.1}$$

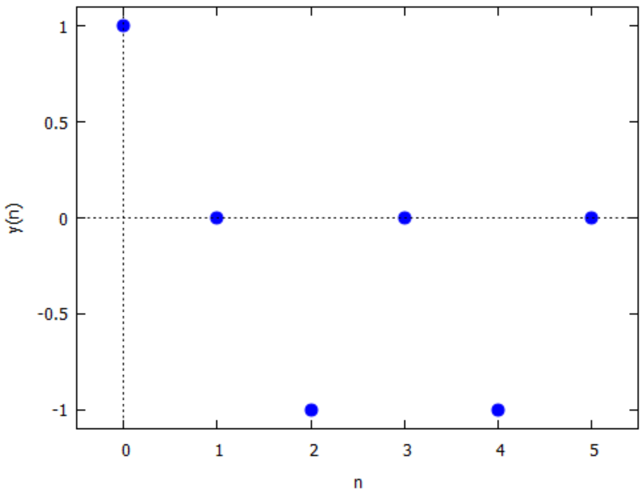

Figura 1.5: evolution(f(y),1,5)

Função staircase: Desenha um diagrama de degraus (ou diagrama de teia de aranha) para a sucessão definida pela equação de recorrência **1.1**

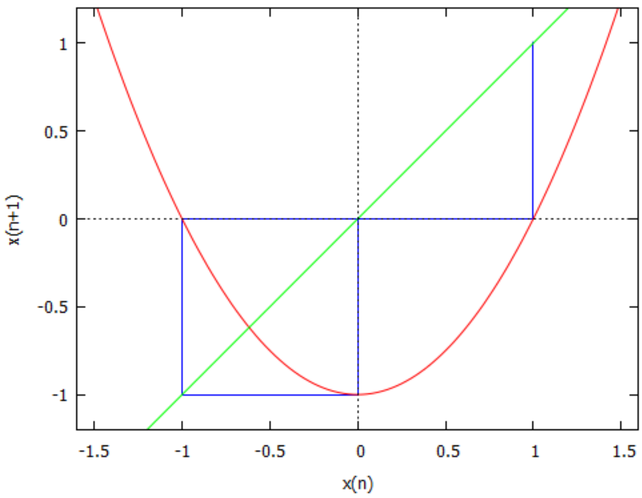

Figura 1.6: staircase(f(x),1,5)

Através do **Exemplo 1** conseguimos observar o gráfico da função em estudo, o gráfico da função identidade e a órbita de certos pontos convergindo para um ponto fixo de f, esses conceitos veremos com mais detalhes adiante.

Capítulo 2

Sistemas Dinâmicos Discretos

Dados dois conjuntos X e Y, não vazios, dizemos que f é uma função de X para Y, e denotamos por $f : X \longrightarrow Y$, se para cada x em X, existe um único correspondente $f(x)$ em Y.

Considere uma função $f : X \longrightarrow Y$. Dizemos que X é o domínio (ou conjunto de saída) de f e denotamos por $D(f)$, Y é o contradomínio (ou conjunto de chegada) de f e denotamos por $CD(f)$ e $f(X) \subset Y$ é a imagem de f e denotamos por $Im(f) = f(X) = \{f(x) : x \in X\}$.

Seja (X, f) um sistema dinâmico discreto, onde X é um conjunto não vazio e $f : X \longrightarrow X$ é uma função, ou seja, o domínio de f é igual ao seu contradomínio. Um sistema dinâmicos discreto é um sistema em que seu estado só muda durante os instantes $t_0, t_1, t_2, \ldots$. No intervalo de tempo entre dois instantes, o estado permanece constante. O mesmo quando constituídos de uma única equação de diferenças, podem exibir uma mudança de comportamentos dinâmicos, como oscilações periódicas e caos, porém, para que se tenha caos é preciso que essas equações sejam não lineares.

Os sistemas dinâmicos discretos possuem aplicações em diversas áreas como economia, biologia, entre outros, que utilizam modelos matemáticos em que o tempo é uma variável discreta, ou seja, analisamos a evolução do sistema em instantes isolados.

Definição 1. *Dada uma função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, um sistema dinâmico discreto é uma sequência de números reais denotados por x_n, para $n = 0, 1, 2, \ldots$, onde cada número após o primeiro é relacionado ao anterior pela equação*

$$x_{n+1} = f(x_n) \tag{2.1}$$

2.1 Iteração

Definição 2. *Considere o sistema dinâmico (X, f). Iterar f n vezes significa compor a função f com ela mesma n vezes: $\underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{n\text{-vezes}} = f^n$.*

Exemplo 2. *Utilizando um exemplo simples:*

Em uma hora teremos uma população c;

Uma hora depois teremos o dobro da população, ou seja, $f(c) = 2c$;

Para duas horas depois teremos $f(f(c)) = f^2(c) = 2 \cdot 2c = 2^2c$. Continuando desta maneira, obteremos, para n horas, $f^n(c) = 2^nc$.

2.2 Pontos Fixos, Pontos Periódicos e Órbitas

Considere um sistema dinâmico (X, f) e $x \in X$. Dizemos que x é um ponto fixo de f se $f(x) = x$. Dizemos que x é um ponto periódico de f se existe $k \in \mathbb{N}$, com $k > 1$, tal que $f^k(x) = x$ e $f^i(x) \neq x$ para $i = 1, \ldots, k-1$, e, neste caso, dizemos que x é ponto periódico de período k de f.

Observação 1. *Se x é um ponto fixo de f, então $x_{n+1})f(x_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Definição 3. *Dado $x \in X$, a órbita de x por f é o conjunto formado por todas as n iteradas de f aplicadas em x, denotado por $O(x)$, isto é, $O(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$, onde $f^\circ(x) = Id(x) = x$, $Id : X \longrightarrow X$ é a função identidade.*

Exemplo 3. *Sejam $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{3}x + 4; x \in \mathbb{R}$ e observe que:*

$$f^\circ(x) = (x), f^1(x) = \frac{1}{3}x + 4, f^2(x) = f(f(x)) = \frac{1}{3}f(x) + 4 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} + 4\right) + 4 = \frac{1}{3^2}x + \left(\frac{1}{3} + 1\right)4. \tag{2.2}$$

Continuando dessa maneira obtemos por indução que, $f^n(x) = \frac{1}{3^n}x + 4\sum_{i=0}^{n+1}\frac{1}{3^i} \Longrightarrow \frac{1}{3^n}x + 2\frac{3^{n+1}-3}{3^n}$, para todo $n \geq 1$.

Daí, temos que $O(x) = \left\{\frac{1}{3^n}x + 2\frac{3^{n+1}-3}{3^n} : n \in \mathbb{N}\right\}$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Além disso, $f(x) = x$ se, e somente se, $x = 6$ e, portanto, $O(x) = \{6\}$, isto é, $f^n(6) = 6$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observação 2. *De modo geral, se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função definida por $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, temos que*

$$f^n(x) = a^n x + b\sum_{i=0}^{n-1} a^i,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

2.3 Fórmulas de Recursão

Considere o sistema dinâmico (X, f) e $x \in X$. Muitas vezes, para estudarmos o comportamento da órbita $O(x)$ de x por f, é conveniente considerarmos as fórmulas de recursão definida por:

$$x_0 = x, x_n = f^{n-1}(x) = f(x_{n-1}); n \geq 1. \tag{2.3}$$

Assim podemos considerar a órbita $O(x)$ de x por f como sendo o conjunto:

$$O(x) = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\} \tag{2.4}$$

A evolução de um sistema discreto de primeira ordem:

$$x_{n+1} = f(x_n) \tag{2.5}$$

é obtida aplicando sucessivamente a função f, aos estado inicial $x_0 = c$:

$$\left\{c, f(c), f^2(c), f^3(c), \ldots f^n(c)\right\} \tag{2.6}$$

Na teoria dos sistemas dinâmicos discretos, quando estudamos o comportamento assintótico das órbitas, estamos interessados em saber sobre quais condições temos que a órbita de um ponto x é limitada ou não. Em particular, quando a órbita é limitada, uma questão interessante é saber se essa órbita converge para um ponto fixo ou periódico do sistema.

No **Exemplo 3**, temos $x_n = \frac{1}{3^n}x_0 + 2\frac{3^{n+1}-3}{3^n}$, para todo $n \geq 1$ e $x_0 \in \mathbb{R}$. Observe que, neste caso, conforme n fica arbitrariamente grande (vai para infinito), temos que x_n vai se aproximando de 6 (ponto fixo do sistema).

Exemplo 4. *(Juros). Suponha-se que seja feito um depósito de valor V no fim de cada período fixo numa aplicação financeira. Sabendo que a taxa de juros por cada período é i e que no período 0 houve um depósito de valor V_0. Qual o valor acumulado ao fim de n períodos?*

Solução. *Seja V_n o valor acumulado ao fim de n períodos. O valor acumulado no fim do período $n+1$ é igual ao valor acumulado no período n com os juros ganho neste período mais o depósito efetuado. Esta situação traduz-se em*

$$V_{n+1} = V_n + iV_n + V,$$

ou seja,

$$V_{n+1} = (1+i)V_n + V \tag{2.7}$$

Se definirmos a função $f(x) = ax + b$, podemos representar (2.7) da seguinte forma,

$$x_{n+1} = f(x_n) \tag{2.8}$$

em que $a = (1+i)$ e $b = V$.

Aplicações sucessivas da função f permitem conhecer a sequência em um determinado momento x_n. No caso onde f é uma função afim podemos encontrar a solução geral em função da condição inicial.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= ax_n + b \\ &= a(ax_{n-1} + b) + b \\ &= a^2 x_{n-1} + ab + b \\ &\vdots \\ &= a^{n+1}x_0 + b(a^n + a^{n-1} + \ldots + a + 1) \end{aligned}$$

Usando séries geométricas $a^n + a^{n-1} + \ldots + a + 1 = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}, a \neq 1$, segue que

$$x_{n+1} = a^{n+1}\left(x_0 + \frac{b}{a-1}\right) - \frac{b}{a-1} \tag{2.9}$$

A equação 2.9 permite calcular o valor x_n para qualquer n sem precisar fazer as iterações. É importante destacar que nem sempre é possível encontrar a solução geral para a órbita de uma função em um ponto, mas, nesse caso foi possível pois se trata de uma função afim.

Teorema 1. *Considere o sistema dinâmico (X, f) e $x_0 \in X$, onde $f(x) = ax + b$ é uma função afim. Então, a órbita de x por f é representada pela sequência*

$$x_{n+1} = ax_n + b, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots, \tag{2.10}$$

onde,

$$x_n = a^n x_0 + \begin{cases} \dfrac{a^n - 1}{a-1} b & se \quad a \neq 1 \\ nb & se \quad a = 1, \end{cases} \tag{2.11}$$

Demonstração: De (2.9) temos que se $a \neq 1$, $x_n = a^n x_0 + \frac{a^n b}{a-1} - \frac{b}{a-1} = a^n x_0 + \frac{(a^n-1)b}{a-1}$. Se $a = 1$, então $a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1 = n$. Isto conclui a demonstração do Teorema. Note que, se $|a| < 1$ então $x_n \to \frac{b}{1-a}$ quando $n \to \infty$. $\square$

Pelo **Teorema 1**, dado um sistema dinâmico $(\mathbb{R}, f)$, onde $f(x) = ax + b$ é uma função afim, estamos aptos a analisar as órbitas de $x \in \mathbb{R}$ por f. Observe que, neste caso, se $a \neq 1$, o ponto fixo de f é $\frac{-b}{a-1}$. Se $a = 1$ e $b \neq 0$, então f não possui ponto fixo. Se $a = 1$ e $b = 0$, então f é a função identidade e, portanto, todo $x \in \mathbb{R}$ é ponto fixo de f. Por fim, se $a = 0$, então f é a função constante igual a b e b é o ponto fixo de f.

Teorema 2. *Considere o sistema dinâmico $(\mathbb{R}, f)$, onde $f(x) = ax + b$ é uma função afim. Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, seja $x_n = f^n(x_0)$, para todo $n \geq 1$.*

Então,

(a) *Se $-1 < a < 1$, então x_n converge para o ponto fixo $\dfrac{-b}{a-1}$.*

(b) *Se $a = 1$ e $b \neq 0$ então x_n não é limitada (x_n é divergente), caso $x_0 \neq \dfrac{-b}{a-1}$.*

(c) *Se $a = 1$ e $b = 0$, então $x_n = x_0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

(d) *Se* $a = -1$, *então* $x_{2n} = x_0$ *e* $x_{2n+1} = -x_0 + b$, *para todo* $n \geq 0$.
(e) *Se* $\mid a \mid > 1$ *e* $x_0 \neq \dfrac{-b}{a-1}$, *então* x_n *não é limitada (é divergente).*

Demonstração: As demonstrações dos itens (a), (b), (c) e (d) seguem diretamente do Teorema 1. Para demonstrar o item (e), basta observar pelo Teorema 1 que

$$x_n = a^n \left(x_0 + \frac{1 - \frac{1}{a^n}}{a-1} b \right).$$

Daí, se $x_0 \neq \dfrac{-b}{a-1}$, temos que $x_0 + \dfrac{1 - \frac{1}{a^n}}{a-1} b$ converge para $x_0 + \dfrac{b}{a-1} \neq 0$ e, portanto, x_n é divergente. □

Capítulo 3

Dinâmica da Função Afim

Neste capítulo estaremos realizando iterações com software wxMaxima e analisando suas órbitas e representação gráfico após cada iteração:

3.1 Iterações e Representações Gráficas

Analisar a órbita do mapa $x_{n+1} = 0,6x_n + 2$ para o valores iniciais $x_0 = -17$, construindo o diagrama no Maxima .

As iterações foram feitas usando o seguinte comando:

(%i1) $kill(all);$

(%i2) $f(x) := (0.6) * x + 2;$

(%i3) $x0 : -17;$

(%i4) $x1 : f(x0);$

(%i5) $staircase(f(x), -8.2, 10);$

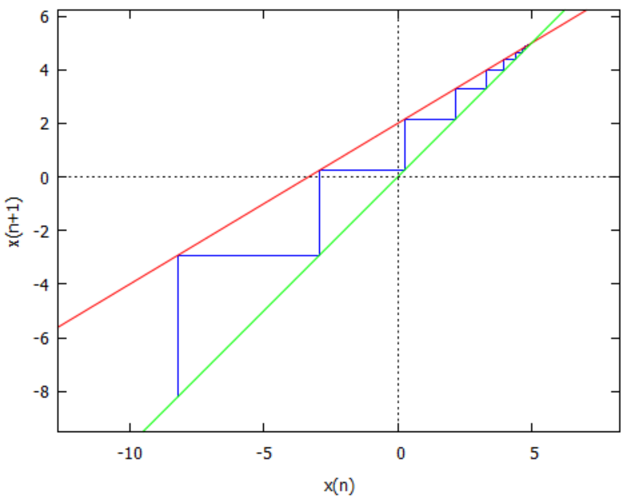

Figura 3.1: Gráfico da função $x_{n+1} = 0,6x_n + 2$ para $x_0 = -17$, dessa forma sua órbita é $O(-17) : \{-17, -8, 2\}$.

Analisar a órbita do mapa $x_{n+1} = 2x_n - 2$ para o valor inicial $x_0 = -1$, construindo o diagrama.

As iterações foram feitas no maxima usando o seguinte código:

(%i1) $kill(all);$

(%i2) $f(x) := 2 * x - 2;$

(%i3) $x0 : -1;$

(%i4) $x1 : f(x0);$

(%i5) $staircase(f(x), -4, 10);$

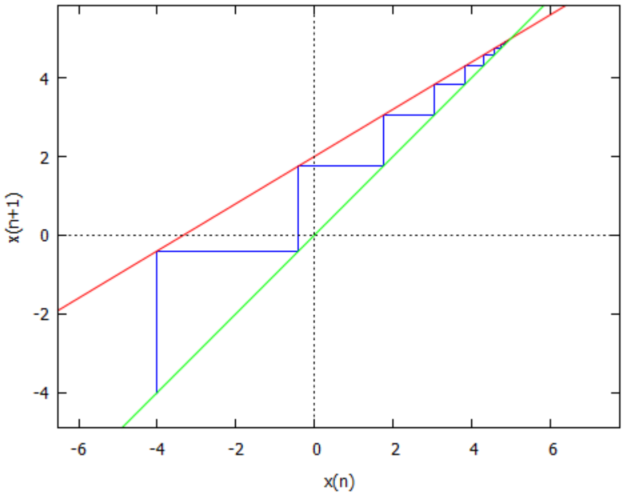

Figura 3.2: Gráfico da função $x_{n+1} = 2x_n - 2$ para $x_0 = -1$, dessa forma sua órbita é $O(-1) : \{-1, -4\}$.

Analisar a órbita do mapa $x_{n+1} = -1,6x_n + 8$ para o valor inicial $x_0 = 2$, construindo o diagrama.

As iterações foram feitas no maxima usando o seguinte código:

$(\%i1)$ $kill(all);$

$(\%i2)$ $f(x) := (-1.6) * x + 8;$

$(\%i3)$ $x0 : 2;$

$(\%i4)$ $x1 : f(x0);$

$(\%i5)$ $staircase(f(x), 4.8, 10);$

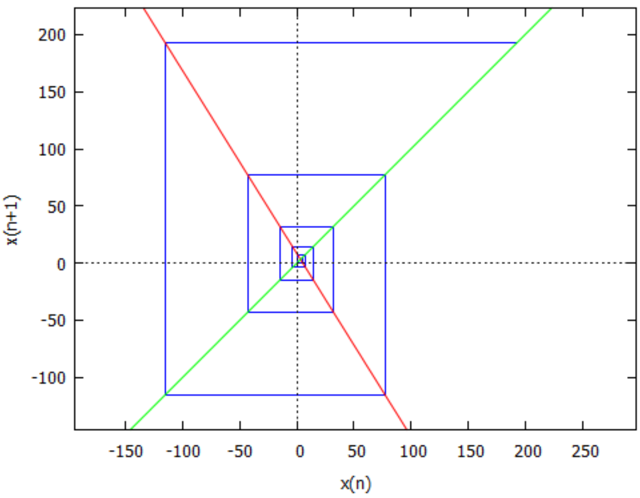

Figura 3.3: Gráfico da função $x_{n+1} = -1,6x_n + 8$ para $x_0 = 2$, dessa forma sua órbita é $O(2) : \{2, 4.8\}$.

Capítulo 4

Dinâmica da Função Tenda

Neste capítulo vamos estudar a função tenda $T_c\,[0,1] \longrightarrow [0,1]$

$$T_c(x) = \begin{cases} cx & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ c(1-x) & \frac{1}{2} \le x \le 1. \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $c \in (0,2]$ é uma constante real fixada. A função Tenda é interessante pois não é uma função suave em todo o seu domínio, é afim por partes mas, diferentemente da função afim, apresenta comportamentos caótico quando $c > 1$.

A sua forma iterativa é definida da seguinte forma:

$$x_{n+1} = T_c(x_n) = \begin{cases} cx_n & 0 \le x_n < \frac{1}{2} \\ c(1-x_n) & \frac{1}{2} \le x_n \le 1. \end{cases} \tag{4.2}$$

Esta função é chamada tenda pois tem o formato de uma tenda. Para $x = \frac{1}{2}$, a altura do topo é $\frac{c}{2}$.

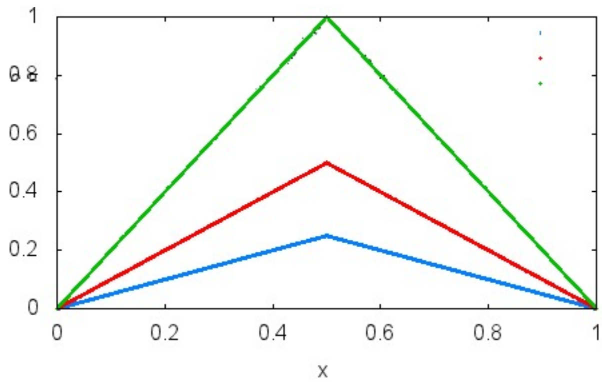

Figura 4.1: Gráfico da função tenda para $c = \frac{1}{2}$ (azul), $c = 1$ (vermelho) e $c = 2$ (verde).

A função T_c para $c = \frac{1}{2}$, $c = 1$ e $c = 2$, respectivamente. Quando c aumenta, o topo do gráfico de T_c sobe, devido ao fator c. Desta observação e dos três gráficos abaixo deduzimos que: se $0 < c < 1$, então T_c intersecta a reta $y = x$ uma vez em $x = 0$, entretanto, se $1 < c < 2$, então existem dois pontos de intersecção.

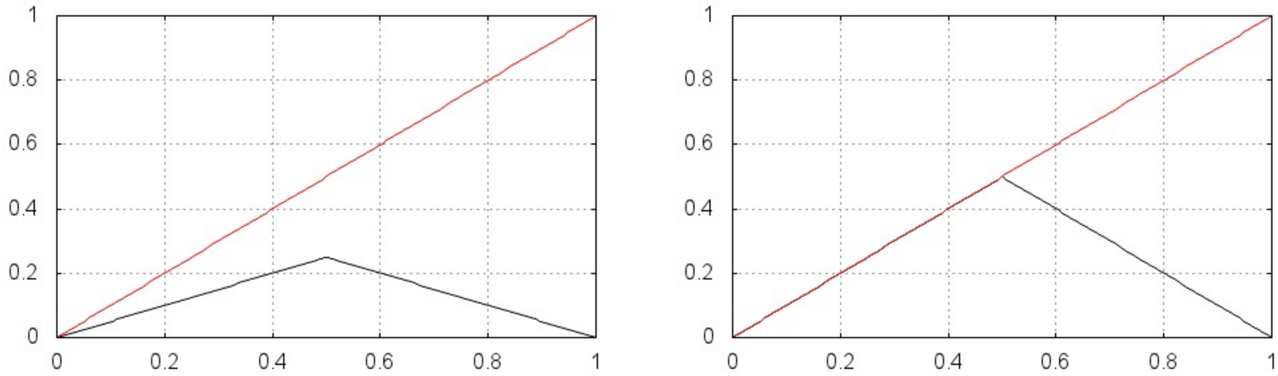

Figura 4.2: Gráficos das funções tenda e $y = x$ para $c = \frac{1}{2}$ e $c = 1$.

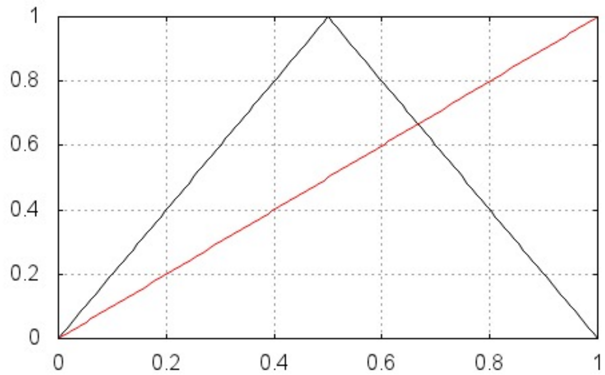

Figura 4.3: Gráficos das funções tenda e $y = x$ para $c = 2$.

4.1 Iterações e Representações Gráfica

Dependendo do valor de c, o mapa da função tenda demonstra uma gama de comportamentos dinâmicos que variam de previsível a caótico.

Observação 3. *Uma forma gráfica de representar a evolução do sistema consiste em desenhar um ponto para cada instante, com abcissa igual ao índice n e ordenada igual a y_n. Em Maxima, o comando evolution, incluído no módulo dynamicalsystems, já citado na* ***seção 1.2*** *permite desenhar esse tipo de diagrama.*

• Se $c < 1$ o ponto $x = 0$ é um ponto fixo atrator do sistema para qualquer valor inicial de x, isto é, o sistema irá convergir na direção $x = 0$ para qualquer valor inicial de x.

Para visualizar melhor o comportamento, utilizamos os seguintes comandos no Maxima:

(%$i1$) $kill(all)$;
(%$i2$) $c : 1/2$;
(%$i3$) $T(x) := if\ 0 <= x\ and\ x < 1/2\ then\ c * x\ else\ if\ 1/2 <= x\ and\ x <= 1\ then\ c * (1 - x)$;
(%$i4$) $x_0 : 0.6$;
(%$o6$) $evolution(T(y), x_0, 10)$;

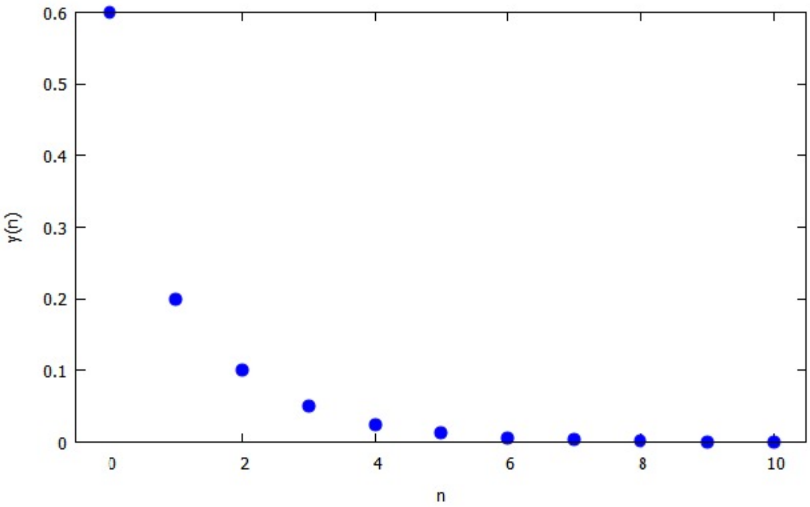

Figura 4.4: Gráfico para $c = \frac{1}{2}$, com valor inicial $x_0 = 0.6$ obtemos as seguintes órbitas representadas no gráfico.

Observação 4. *Se $c = 1$, então a função tenda possui todos pontos no intervalo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ como pontos fixos e $T_c(x) \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ se $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Se $1 < c \leq 2$, então a função tenda possui comportamento caótico, isto é, uma pequena pertubação nas condições iniciais pode resultar numa grande diferença depois de algumas iteradas e, portanto, trajetórias muito próximas divergem exponencialmente tornando o sistema imprevisível.*

Por exemplo, se tomarmos $c = 1.5$:

As iterações foram feitas no Maxima usando o seguinte código:

(%i1) $kill(all)$;
(%i2) $Tr(x) := if\ 0 <= x\ and\ x <= 1/2\ then\ r * x\ else\ if\ 1/2 < x\ and\ x <= 1\ then\ r * (1 - x)$;
(%i3) $r : 1.5$;
(%i4) $Tr(x)$;
(%i5) $evolution(Tr(y), 20)$;

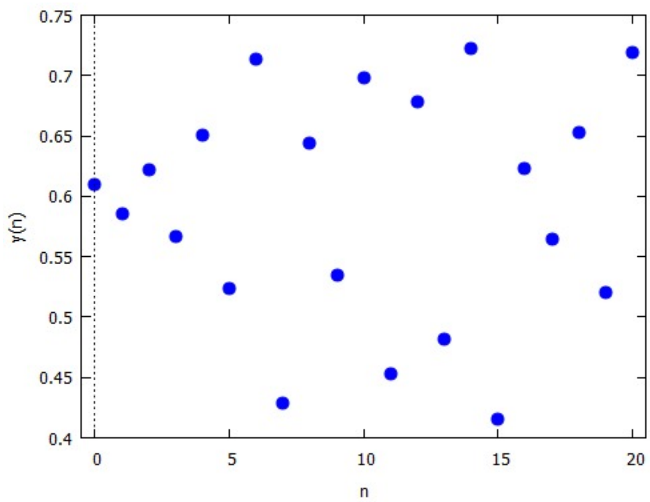

Figura 4.5: Obtemos as seguintes órbitas $\to 0.585 \to 0.6225 \to 0.56625 \to 0.650625 \to \ldots$

Mas o que acontece quando o valor de c é maior que 2?

Para $c = 2$, neste exemplo calculamos as 20 primeiras iteradas para duas condições iniciais abaixo:

(i) $x_0 = 0.2$;

(ii) $x_0 = 0.2001 = 0.2 + \epsilon$

As iterações foram feitas no Maxima usando o seguinte código:

(%$i1$) $kill(all)$;
(%$i2$) $c : 2$;
(%$i3$) $x0 : 0.2$;
(%$i4$) $ep : 0.0001$;
(%$i5$) $x00 : x0 + ep$;
(%$i6$) $T(x) := if\ 0 <= x\ and\ x < 1/2\ then\ c * x\ else\ if\ 1/2 <= x\ and\ x <= 1\ then\ c * (1 - x)$;
(%$i7$) $for\ n\ from\ 0\ thru\ 20\ do\ (print(n, x0, x00), x0 : float(T(x0)), x00 : float(T(x00)))$;

0	0.2	0.2001
1	0.4	0.4002
2	0.8	0.8004
3	0.3999999999999999	0.3992
4	0.7999999999999998	0.7984
5	0.4000000000000004	0.4032
6	0.8000000000000007	0.8064
7	0.3999999999999986	0.3872
8	0.7999999999999972	0.7744
9	0.4000000000000057	0.4512
10	0.8000000000000114	0.9024000000000001
11	0.3999999999999773	0.1951999999999998
12	0.7999999999999545	0.3903999999999996
13	0.4000000000000909	0.7807999999999993
14	0.8000000000001819	0.4384000000000015
15	0.3999999999996362	0.8768000000000029
16	0.7999999999992724	0.2463999999999942
17	0.4000000000014552	0.4927999999999884
18	0.8000000000029104	0.9855999999999767
19	0.3999999999941792	0.0288000000004657
20	0.7999999999883585	0.0576000000009313

Figura 4.6: As 20 primeiras iteradas para ambas as condições iniciais e suas órbitas .

O sistema mostra sensitividade para ambas as condições iniciais. Comparando os valores numéricos na segunda e terceira colunas, não é difícil ver que a sequência diverge claramente quando $n \geq 9$. Este teste de sensibilidade às condições iniciais fornece aos pesquisadores uma ferramenta simples para determinar se um sistema é ou não é caótico.

Considerações Finais

A área de sistemas dinâmicos discretos é extensa e interessante, pois está relacionada com várias áreas como matemática aplicada, teoria dos números, topologia, análise funcional entre outras. O conceito de iteração era um conceito ja conhecido por mim através de uma iniciação científica, iterar nada mais é que realizar composição de funções. A aplicabilidade de de iteração em uma função é gigantesca, abrange muitos estudos em áreas diversas.

A utilização do softwares matemático wxMaxima se mostrou indispensável para introduzir esse conceito, uma vez que, o entendimento de diversos sistemas passou pela construção de gráficos e diagramas.

Concluímos que a da dinâmica das funções afim/tenda se torna muito interessante por além de ser um conteúdo flexível de ser trabalhado, podemos entender mais sobre o conceito de iteração e órbitas tendo como base em um trabalho futuro com alunos do ensino médio, favorecendo o desenvolvimento do raciocínio de forma contextualizada.

Referências Bibliográficas

[1] DEVANEY, R. L. - *A First Course in Chaotic Dynamical Sytems: Theory and Experiment*. Addison Wesley, 1992.

[2] LYNCH, S. - *Dynamical Systems with Applications Using Mathematica*. Birkhauser (Boston, Basel, Berlin), 2007.

[3] VILLATE, J. E. - *Introdução aos Sistemas Dinâmicos. UMA ABORDAGEM PRATICA COM MAXIMA*. Versão 1.2, Creative Commons, Portugal, 2007.