UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL
UNIDADE UNIVERSITÁRIA NOVA ANDRADINA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MATHEUS GONÇALVES DIAS BARTIMAN DE OLIVEIRA

APLICAÇÃO DA MATEMÁTICA FINANCEIRA EM INVESTIMENTOS

NOVA ANDRADINA - MS
2022

MATHEUS GONÇALVES DIAS BARTIMAN DE OLIVEIRA

APLICAÇÃO DA MATEMÁTICA FINANCEIRA EM INVESTIMENTOS

Trabalho de Conclusão de Curso, na modalidade monografia, apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática, da Unidade Universitária Nova Andradina, da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, como parte dos requisitos para conclusão do curso de graduação em Licenciatura em Matemática.

Orientador(a): Profº Dr. Oyran Rayzaro

NOVA ANDRADINA – MS
2022

O48a Oliveira, Matheus Gonçalves Dias Bartiman

Aplicação da matemática financeira em investimentos/ B Matheus Gonçalves Dias Bartiman de Oliveira – Nova Andradina, MS: UEMS, 2022.

60 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura) – Matemática – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, 2022.

Orientador: Prof. Dr. Oyran Rayzaro

1. Matemática financeira 2. Educação Financeira 3. Juros 4. Taxas 5. Inflação 6. Investimentos 7. Tesouro direto I. Rayzaro, Oyran II. Título

CDD 23. ed. - 650.01513

Bibliotecária Aline Perdomo Soutelo, CRB Provisório n° 714 - 1ª Região

MATHEUS GONÇALVES DIAS BARTIMAN DE OLIVEIRA

APLICAÇÃO DA MATEMÁTICA FINANCEIRA EM INVESTIMENTOS

Trabalho de Conclusão de Curso, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciatura em Matemática, apresentado à Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul – UEMS.

Aprovado em __/ __/ __

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Oyran Rayzaro
Orientador

Prof. Dr. Gustavo Pavani
Membro

Prof. Me. Anderson Negrelli
Membro

Dedico este trabalho aos meus pais, pela educação, disciplina e formação de caráter. Em especial minha avó, minha maior incentivadora, por sempre acreditar em mim, até quando eu mesmo, impunha obstáculos inalcançáveis.

AGRADECIMENTOS

A Deus, autor da vida, por me proporcionar momentos e realizações tão grandes durante esses 4 anos.

À minha avó, Rosalina Bastiman de Oliveira, por sempre acreditar em mim e me encorajar com enormes incentivos desde o início de minha vida acadêmica. Aproveito ainda, para registrar meus singelos agradecimentos, pelo carinho e amor para comigo.

Aos meus pais, Elcio Bartiman de Oliveira e Rita de Cássia Gonçalves Dias, por todo o apoio em momentos difíceis, pela paciência e compreensão em momentos de raiva e, ainda, por todo o aporte que me deram durante essa jornada.

Aos meus irmãos, Gustavo Gonçalves Dias Bartiman de Oliveira e Guilherme Gonçalves Dias Bartiman de Oliveira, pelo companheirismo e confiança, espero que trilhem caminhos ainda melhores.

À minha namorada, Any Caroline Souza Silva, pela dedicação oferecida, pelos momentos de amparo e pela compreensão aos momentos de ausência.

À minha madrasta, Fabiana Odília, pelos incentivos em momentos de tensão e pelo apoio prestado em momentos turbulentos.

À meu padrinho, Rafael Bartimann, pela imensa atenção, pelo incentivo e por colaboras no desenvolvimento de minhas ideias.

Ao meu orientador, Profº Dr. Oyran Rayzaro, pelos momentos de conversas, de conselhos, de ensinamentos, de apoio e, principalmente, pela dedicação com os acadêmicos dessa instituição. Sinto-me orgulhoso de ter sido seu orientando.

A todos os meus amigos, sem exceção, e colegas de turma, por proporcionarem momentos inesquecíveis.

Ao corpo docente e a todos os funcionários da UEMS, pelo exemplo de profissionalismo e dedicação como nossa Universidade.

"O tempo e o espaço são modos pelos quais pensamos e não condições nas quais vivemos".

(Albert Einstein)

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo apresentar a importância da realização de investimentos e revisar fundamentos básicos da matemática financeira. Pensando nisso e levando em consideração a falta de domínio sobre conceitos voltados a finanças e a economia, por parte das pessoas, pretende-se explorar, inicialmente, um breve estudo sobre porcentagem, perpassando por juros simples e compostos, associados diretamente às progressões aritmética e geométrica, respectivamente, além de abordar diferentes tipos de taxas. Embasado nos assuntos mencionados, o trabalho encerra-se com aplicações da matemática financeira associada a investimentos, especificamente, na poupança e nos títulos públicos negociáveis.

Palavras-Chave: Matemática Financeira; Educação Financeira; Juros; Taxas; Inflação; Investimentos; Tesouro Direto.

ABSTRACT

This paper aims to present the importance of making investments and reviewing the basics of financial mathematics. With this in mind and taking into account the lack of mastery over concepts related to finance and economics, on the part of people, it is intended to explore, initially, a brief study on percentage, passing through simple and compound interest, directly associated with arithmetic and geometric, respectively, in addition to addressing different types of taxes. Based on the subjects mentioned the work ends with applications of financial mathematics associated with investments, specifically, in savings and negotiable government bonds.

Keywords: Financial Mathematics; Financial education; Fees; Taxes; Inflation; Investments; Direct Treasure.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Promoção de notebook.. 13
Figura 2 - Comparação entre Capitalização Simples e Capitalização Composta..................... 28
Figura 3 - Feriados Bancários entre 17/04/2022 a 25/12/2023 37
Figura 4 - Função DIATRABALHOTOTAL... 38
Figura 5 - Argumentos da função 38
Figura 6 - Dias úteis entre as datas informadas 39

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Capitalização Simples x Capitalização Composta ($n \geq 1$) 28
Tabela 2 - Capitalização Simples x Capitalização Composta ($0 < n \leq 1$) 29
Tabela 3 - Tabela regressiva de Imposto de Renda 47
Tabela 4 - Tabela regressiva de Imposto sobre Operações Financeiras 48
Tabela 5 - Fluxo de pagamento da NTN-B 55

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO ... 10

2. PORCENTAGEM ... 13
2.1. PORCENTAGEM DE UMA DETERMINADA QUANTIA ... 14

3. PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E JUROS SIMPLES ... 16
3.1. PROGRESSÃO ARITMÉTICA (P.A) ... 16
3.2. JUROS SIMPLES ... 18

4. PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS E JUROS COMPOSTOS ... 22
4.1. PROGRESSÃO GEOMÉTRICA (P.G) ... 22
4.2. JUROS COMPOSTOS ... 24
4.3. CAPITALIZAÇÃO SIMPLES X CAPITALIZAÇÃO COMPOSTA ... 27

5. TAXAS DE JUROS ... 30
5.1. TAXAS PROPORCIONAIS E EQUIVALENTES ... 31
5.1.1. Taxas Proporcionais ... 31
5.1.2. Taxas Equivalentes ... 33
5.2. TAXAS NOMINAL E EFETIVA ... 34
5.2.1. Taxa Nominal ... 34
5.2.2. Taxa Efetiva ... 34
5.3. TAXA POR DIA ÚTIL (D.U) ... 35
5.3.1. Taxa Selic ... 36
5.3.2. Quantidade de dias úteis entre duas datas ... 36
5.4. TAXAS VARIÁVEIS ... 39

6. CADERNETA DE POUPANÇA ... **41**
6.1. INFLAÇÃO ... 44

7. TÍTULOS PÚBLICOS FEDERAIS ... 46
7.1. LETRAS DO TESOURO NACIONAL (LTN) ... 46
7.1.1. Rentabilidade bruta de taxa de rentabilidade equivalente anual ... 46
7.1.2. Tributação sobre a rentabilidade dos títulos ... 47
7.2. NOTAS DO TESOURO NACIONAL – SERIE F (NTN-F) ... 49
7.2.1. Calculo do cupom de juros ... 50
7.3. LETRAS FINANCEIRAS DO TESOURO (LFT) ... 50
7.3.1. Cálculo do preço da Letra Financeira do Tesouro ... 51
7.3.2. Cálculo do Valor do resgate da Letra Financeira do Tesouro (LFT) na data do vencimento ... 51
7.4. NOTAS DO TESOURO NACIONAL (NTN-B PRINCIPAL) ... 52
7.5. NOTAS DO TESOURO NACIONAL – SERIE B ... 54

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS ... 56

REFERÊNCIAS ... 58

1. INTRODUÇÃO

A matemática financeira é uma importante ferramenta ligada, diretamente, ao cotidiano das pessoas. Por esse motivo, o indivíduo que tenha, ao menos, conhecimentos básicos voltados a essa área, acaba estabelecendo alguns critérios ao utilizar seu dinheiro, por exemplo: observa as taxas de juros aplicadas em pagamentos parcelados; avalia as melhores formas de pagamento; realiza um planejamento financeiro familiar, reduzindo assim a possibilidade de endividamento; avalia os investimentos financeiros que proporcionará maior rentabilidade, dentre outras.

Infelizmente, a abordagem desse tema nas escolas ainda se apresenta como um grande desafio. Segundo Campos (2012), isso se deve ao fato de ser um processo que exige um ensino contextualizado e significativo, pautado nas vivências reais do estudante. Com isto, a matemática financeira - a qual se deve tratamento fundamental, visto que contribui de forma positiva na formação de cidadãos conscientes economicamente – não vem sendo tratada com a devida importância.

O contato das pessoas com a Educação Financeira desde a infância, faz com que se tenha jovens mais estruturado em suas finanças pessoais, além disso, os alunos entenderiam que a abordagem desse tema não estaria ligada ao enriquecimento e sim a conscientização sobre saberem lidar com o dinheiro, algo afirmado por Sthepani (2005, p.12):

> Cada indivíduo participante do processo de formação do ser humano tem uma parte de responsabilidade nesse processo de mudança pela qual a educação passa. E a Educação Financeira vem ser um elo entre várias áreas do conhecimento, no sentido de fazer com que trabalhem juntas e formem na epistemologia do aluno conceitos capazes de instrumentalizá-lo para a construção de sua autonomia.

Assim a educação financeira não será apenas um aprendizado, mas acompanhará o aluno por toda a sua existência.

A carência, por parte da população, em conhecimentos básicos sobre como investir faz da caderneta de poupança, o investimento mais popular entre as pessoas físicas. Pela falta de informações dos usuários e pela facilidade no investimento, as pessoas costumam acreditar que a caderneta de poupança é o investimento mais seguro e mais rentável. De acordo com os dados apresentados pela XP Investimentos, em uma pesquisa feita no ano de 2019, a poupança é utilizada por 84,2% dos investidores, estando bem à frente do segundo colocado, fundo de investimentos (6%).

A importância de investir dinheiro e ter uma vida financeira equilibrada foi discutida por Cerbassi (2004) e Camargo (2007). De acordo com Cerbassi (2004), investir é o caminho da garantia ou melhora do futuro em relação ao que se construiu até hoje. Já para Camargo

(2007), essa estratégia visa garantir a tranquilidade econômico-financeira do indivíduo. Algo que na teoria aparenta ser fácil, porém não gastar além do que se ganha não faz parte da realidade de muitas pessoas. Este fato pode ser percebido a partir das inúmeras reportagens em jornais impressos e em sites eletrônicos relatando o endividamento em massa da população no Brasil.

Este trabalho tem como objetivo apresentar a matemática financeira aplicada a alguns investimentos, como a famosa caderneta de poupança e os títulos públicos (títulos emitidos com intuito de realizar captação de recursos para financiar atividades do governo federal). A escolha específica dos títulos públicos tem por objetivo disseminar suas características e desmistificar a ideia de que a poupança é o único investimento "seguro", visto que esses títulos possuem baixíssimo risco de crédito, ou seja, risco de o investidor não receber o dinheiro investido.

Os assuntos mais complexos serão abordados de uma maneira mais didática, buscando estabelecer uma base teórica para ser utilizada nos cálculos seguintes, sem se preocupar em detalhar seus fundamentos. Por exemplo, a taxa Selic será definida sem a preocupação de mostrar como o Sistema Especial de Liquidação e de Custódia (SELIC) realiza os cálculos necessários para se obter o percentual.

O presente trabalho está dividido em oito capítulos. Em cada um dos capítulos é apresentado a parte teórica seguida de alguns exemplos, que tem por intuito facilitar a compreensão do tema abordado. O texto está direcionado a aplicações do dinheiro em diferentes tipos de investimento, pensando nisso, os exemplos desenvolvidos seguem essa linha de raciocínio.

O primeiro capítulo faz uma breve referência sobre porcentagem, precedida de exemplos que relacionam algumas aplicações ao cotidiano.

Logo em seguida, o segundo capítulo relaciona juros simples com progressão aritmética. Utilizando a mesma linha de desenvolvimento, o terceiro capítulo refere-se à relação entre juros compostos e progressão geométrica. Ainda, é apresentado uma comparação da evolução do dinheiro aplicado em juros simples com a dos juros compostos.

No quarto capítulo é explorado algumas taxas de juros – taxas essas que serão necessárias para o desenvolvimento dos próximos capítulos. Os conceitos abordados foram: taxas proporcionais e equivalentes, taxas nominais e efetivas, taxas variáveis, taxa por dia útil e taxa Selic.

Por fim, o quinto e sexto capítulo discorre sobre as aplicações da matemática financeira em investimentos na caderneta de poupança e em títulos públicos, nessa ordem. No sexto capítulo, os títulos públicos são caracterizados, ainda, de forma clara, é detalhado como esses títulos podem ser comprados pelos investidores pessoa física.

2. PORCENTAGEM

Como o próprio nome já nos remete, é representada por uma razão entre a parte e o todo, ou seja, é possível estabelecer uma comparação entre uma quantidade da parte com cem unidades do todo. Justamente a essa razão específica, chamamos de Porcentagem. O símbolo % é usado para indicar a porcentagem.

É importante salientar, que um valor em percentual, ainda pode ser expresso de outras formas, como: na forma de fração ou como um número decimal. Por exemplo, 5% (cinco por cento) significa que a cada cem unidades do todo estamos tomando apenas cinco unidades, podendo ser expressado da seguinte forma:

$$5\% \text{ (percentual)} = \frac{5}{100} \text{ (fracionária)} = 0{,}05 \text{ (decimal)}$$

Exemplo 1 – Uma loja do setor e-commerce anunciou a promoção de um notebook (somente para compras à vista), conforme demonstrado na figura 1.

Figura 1 - Promoção de notebook

Fonte: Adaptado de AMAZON.COM, 2022

Qual o percentual de desconto dado pela loja?

Resolução: Inicialmente é necessário descobrir o valor do desconto aplicado pela loja, logo 1599,00 – 1499,00 = 100,00 reais para compras à vista. Para encontrarmos o percentual de desconto, basta encontrar a razão da parte (R$100,00) pelo todo (R$1599,00), sendo assim, temos:

$$\frac{100}{1599} \approx 0{,}0625 = \frac{6{,}25}{100} = 6{,}25\% \;.$$

Exemplo 2 – A Petrobras comunicou que no dia 17 de junho de 2022 terá novos aumentos no preço da gasolina vendidos às distribuidoras. Sendo assim, a gasolina passará de R$ 3,86 para R$ 4,06 por litro. Qual foi o percentual de aumento?

Resolução: O aumento do preço do litro foi de R$ 4,06 – R$ 3,86 = R$ 0,20 centavos por litro. Para obtermos o valor percentual de aumento basta dividirmos 0,20 por 3,86, temos:

$$\frac{0{,}20}{3{,}86} \approx 0{,}05 = \frac{0{,}05}{100} = 5\% \;.$$

2.1. PORCENTAGEM DE UMA DETERMINADA QUANTIA

Para efetuar esse cálculo, basta multiplicar o valor correspondente ao todo, pela fração centesimal ou pelo fator decimal, equivalente ao percentual.

Exemplo 3 – O valor do salário mínimo no ano de 2021 foi de R$1.100,00 reais. No mês de junho de 2022 foi promulgado a Lei 14.358 que confirma um aumento no salário mínimo dos brasileiros de 10,15%, caso comparado ao salário anterior. Qual será o valor do salário mínimo após o reajuste?

Resolução: Inicialmente, precisamos calcular quanto é 10,15% de 1100,00:

$$1100 \times \frac{10{,}15}{100} = 1100 \times 0{,}1015 = 111{,}65$$

Logo o valor do salário mínimo após o reajuste será de: R$ 1100,00 + R$ 111,65 = R$ 1211,65 reais.

Exemplo 4 – A pandemia acabou afetando as vendas de uma revendedora de automóveis usados. Com isso o proprietário anunciou um desconto de 10% no valor dos carros que estavam sendo vendidos em um feirão de automóveis. Qual seria o preço que uma pessoa pagaria, na feira, por um carro da loja que antes custava R$110 mil?

Resolução: Primeiramente, devemos calcular quanto é 10% de 110.000:

$$110.000 \times \frac{10}{100} = 110.000 \times 0{,}1 = 11.000$$

O valor que a pessoa pagaria pelo veículo seria de 110.000 – 11.000 = 99.000 reais.

3. PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E JUROS SIMPLES

3.1. PROGRESSÃO ARITMÉTICA

De modo geral, Progressão Aritmética é uma sequência numérica na qual a diferença entre dois termos consecutivos será sempre constante.

Cada termo da (P.A) é indicado por uma letra precedida de um número que designa sua posição na sequência. Por exemplo, o termo a_3 na seguinte P.A (2,4,6,8,10) é número 6, pois é o número que ocupa a 3ª posição na sequência.

Dado um número a_1 qualquer, podemos construir uma sequência cujo a diferença entre um termo qualquer e seu anterior seja constante, em outras palavras, podemos construir uma Progressão Aritmética. Basta adicionarmos um número r (denominado razão da progressão, dada pela diferença entre os dois termos) ao termo a_1, obtendo assim o segundo termo a_2. Ao segundo termo a_2 adicionamos novamente a razão r, obtendo assim o terceiro termo a_3, e assim sucessivamente, logo, temos:

$$a_1 = \text{primeiro termo da sequência}$$

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_2 + r$$

Substituindo o valor de a_2, que encontramos anteriormente, temos:

$$a_3 = (a_1 + r) + r \ \Rightarrow \ a_3 = a_1 + 2r$$

Seguindo o mesmo raciocínio, podemos encontrar o próximo termo:

$$a_4 = a_3 + r \ \Rightarrow \ a_4 = (a_1 + 2r) + r \ \Rightarrow \ a_4 = a_1 + 3r$$

Utilizando os resultados anteriores, podemos escrever o n-ésimo termo da progressão aritmética:

$$a_n = a_{n-1} + r \ \Rightarrow \ a_n = [a_1 + (n - 2) . r) + r \ \Rightarrow \ a_n = a_1 + (n - 1) . r$$

Ao observar esses resultados, é possível notar que cada termo será igual a soma entre o primeiro termo com a razão multiplicada pela posição anterior, sendo assim podemos definir uma Fórmula do Termo Geral de uma Progressão Aritmética:

$$a_n = a_1 + (n - 1) . r$$

São exemplos de progressão aritmética:

- (2, 6, 10, 14, ...); a_1 = 2 e r = 4
- (-1, -5, -9, -13, ...); a_1 = -1 e r = -4
- (4, 4, 4, 4, 4, ...); a_1 = 4 e r = 0
- ($\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{9}{2}$, ...); a_1 = $\frac{1}{2}$ e r = 1

Exemplo 5 – Calcule o 10º termo da P.A: (26, 31, 36, 41, ...)

Resolução: Inicialmente, precisamos identificar que:

$$\begin{cases} a_1 = 26 \\ r = 31 - 26 = 5 \\ n = 10 \text{ (10º termo)} \end{cases}$$

Substituindo esses valores na fórmula do termo geral, temos:

$$a_n = a_1 + (n - 1) . r$$
$$a_{10} = 26 + (10 - 1) . 5$$
$$a_{10} = 26 + 45 = 71$$

Logo, o décimo termo da progressão aritmética indicada é igual a 71.

Exemplo 6 – Em uma progressão aritmética, o primeiro termo a_1 é igual a 50 e sua razão r = 10, qual o valor do 15º termo?

Resolução: Temos a_1= 50, r = 10 e n = 15, substituindo esses dados na Fórmula do Termo Geral de uma P.A, temos:

$$a_n = a_1 + (n - 1) . r$$
$$a_{15} = 50 + (15 - 1) . 10$$
$$a_{15} = 50 + 140 = 190$$

Portanto, o décimo quinto termo da P.A é igual a 190.

Exemplo 7 – Uma quantia de R$1.000,00 reais foi aplicada em um banco, por um investidor. Com isso, ficou acordado um retorno de 0,5%, valor que será calculado mensalmente sobre a quantia aplicada. Se o investidor deixou seu dinheiro 12 meses, qual valor total recebido pelo investidor no fim do período?

Resolução: Como o próprio enunciado menciona, será adicionado a mesma quantidade todos os meses ao valor inicial aplicado, ou seja, 0,5% de R$ 1.000,00 é:

$$1000 \times \frac{0,5}{100} = 1000 \times 0,005 = 5$$

Logo, o primeiro termo a_1 da progressão aritmética é 1000 e a razão r = 5, o valor total a receber no 12º mês de aplicação corresponde ao 13º termo, pois o primeiro termo da progressão equivale ao valor aplicado inicialmente. Sendo assim, podemos utilizar a Fórmula Geral encontrada anteriormente:

$$a_n = a_1 + (n - 1) . r$$

$$a_{13} = 1000 + (13 - 1) . 5$$

$$a_{13} = 1000 + 60 = 1060$$

Portanto, o valor total que o investidor irá receber ao fim do período acordado, será de R$1060,00 reais.

Esse retorno recebido pelo investidor do banco a qual o valor foi aplicado, é denominado **juros**. Nesse caso, demonstramos um exemplo de aplicação financeira envolvendo juros simples, que é um tipo de Progressão Aritmética.

3.2. JUROS SIMPLES

Segundo CAMARGO (2013), deslocar o valor do dinheiro no tempo é o princípio fundamental da Matemática Financeira.

Quando se empresta valor a alguém ou até mesmo a uma instituição bancária, tem-se a expectativa de receber uma determinada remuneração em cima do valor emprestado. Essa remuneração, denominamos de **juros (J)**, ou seja, é uma taxa predeterminada no início da negociação para que compense a perda do valor do dinheiro.

Esta remuneração é dada de forma gradativa por uma **taxa de juros (i)** – porcentagem que será aplicada ao valor principal ou **capital inicial (C_0)** no fim de cada período.

Quando a taxa de juros é aplicada diretamente sobre o capital inicial, temos um regime de capitalização simples – juros calculados nesse padrão chamamos de juros simples.

Desta forma, é possível notar que esse regime de capitalização simples dá origem a uma progressão aritmética na qual o primeiro termo (iremos representar como a_0 por questões de notação), corresponde ao capital inicial (C_0) e a razão r é igual aos juros (J) calculados sobre o capital inicial. Sendo assim, a fórmula geral para cálculo de juros é dada por:

$$\mathbf{J = \ C_0 \, . \, i} \qquad \text{(I)}$$

Assim como foi feito anteriormente, podemos reescrever esses termos da progressão aritmética, na qual o termo a_0 corresponde ao capital inicial, ou seja, $a_0 = C_0$.

Sabemos que o próximo termo da sequência será o capital inicial somado com os juros calculados, logo, temos:

$$a_0 = C_0 + J$$

Por I, temos:

$$a_1 = C_0 + C_0 \, . \, i = C_0 \, . \, (1 + i)$$

Realizando sucessivamente, temos:

$$a_2 = C_0 + C_0 \, . \, i + C_0 \, . \, i = C_0 \, . \, (1 + 2i)$$

$$a_3 = C_0 + C_0 \, . \, i + C_0 \, . \, i + C_0 \, . \, i = C_0 \, . \, (1 + 3i)$$

$$a_4 = C_0 + C_0 \, . \, i + C_0 \, . \, i + C_0 \, . \, i + C_0 \, . \, i = C_0 \, . \, (1 + 4i)$$

...

$$a_n = C_0 + C_0 \, . \, i + C_0 \, . \, i + \ldots + C_0 \, . \, i = C_0 \, . \, (1 + 4i) = C_0 + n \, . \, C_0 \, . \, i = C_0 \, . \, (1 + ni)$$

em que a_n representa o valor do capital inicial acrescido dos juros calculados sobre esse capital após n períodos, chamamos este valor final de **Montante (M_n).** Logo, podemos escrever da seguinte forma:

$$\boldsymbol{M_n = \ C_0 \, . \, (1 + ni)} \qquad \textbf{(II)}$$

Além disso, pela equação (I), temos:

$$J_1 = C_0 \, . \, i$$

$$J_2 = \ C_0 \, . \, i + \ C_0 \, . \, i = 2 \, . \, C_0 \, . \, i$$

$$J_3 = \ C_0 \, . \, i + \ C_0 \, . \, i \ + \ C_0 \, . \, i \ = 3 \, . \, C_0 \, . \, i$$

$$J_4 = \ C_0 \, . \, i + \ C_0 \, . \, i \ + \ C_0 \, . \, i \ + C_0 \, . \, i = 4 \, . \, C_0 \, . \, i$$

...

$$J_n = \ C_0 \, . \, i + \ C_0 \, . \, i \ + \cdots + C_0 \, . \, i = n \, . \, C_0 \, . \, i$$

em que J_n representa o valor total de juros após um período n de aplicações.

$$\mathbf{J_n = \ n \, . \, C_0 \, . \, i} \qquad \textbf{(III)}$$

Vale salientar que, em todos os cálculos financeiros tanto a taxa de juros (i) quanto o período de aplicação (n) devem estar na mesma unidade de tempo.

Exemplo 8 – Um certo investidor decidiu aplicar uma quantia de R$ 4.500,00, em uma instituição financeira que pagava 0,75% de juros simples ao mês, durante 12 meses. Qual o montante recebido por este investidor no final dessa aplicação?

Resolução: Possuímos as seguintes informações:

$$\begin{cases} C_0 = \text{R\$ } 4.500{,}00 \\ i = 0{,}75\% = \frac{0{,}75}{100} = 0{,}0075 \text{ ao mês} \\ n = 12 \text{ meses} \end{cases}$$

Sabemos que se trata do regime de capitalização simples, sendo assim podemos utilizar a equação II, temos:

$$M_n = C_0 \,.\, (1 + ni).$$

Substituindo os valores, temos:

$$M_{10} = 4500 \,.\, (1 + 12 \,.\, 0{,}0075)$$

$$M_{10} = 4500 \,.\, (1 + 0{,}09)$$

$$M_{10} = 4500 \,.\, (1{,}09) = 4905$$

Logo, após 12 meses dessa aplicação sob regime de capitalização simples, o investidor recebeu o valor de R$ 4.905,00 reais.

Exemplo 9 – Um investidor resgatou um montante de R$ 1.989,00 de uma instituição financeira. Sabendo que a aplicação foi de R$ 1.700 reais durante 20 meses no regime de capitalização simples, qual foi a taxa de juros i mensal da aplicação?

Resolução: Informações fornecidas:

$$\begin{cases} C_0 = \text{R\$ } 1.700{,}00 \\ M_n = \text{R\$ } 1.989{,}00 \\ n = 20 \text{ meses} \end{cases}$$

Substituindo os valores dados na equação II, temos:

$$M_n = C_0 \,.\, (1 + ni)$$

$$1989 = 1700 \,.\, (1 + 20\mathrm{i})$$

$$(1 + 20\mathrm{i}) = \frac{1989}{1700}$$

$$(1 + 20\mathrm{i}) = 1{,}17$$

$$20i = 1{,}17 - 1$$

$$i = \frac{0{,}17}{20} \quad \Rightarrow i = 0{,}0085 \ \Rightarrow i = 0{,}85\%$$

Portanto, a taxa de juros i dessa aplicação é 0,85% ao mês.

4. PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS E JUROS COMPOSTOS

4.1. PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

É uma sequência de termos não nulos em que o quociente entre um termo qualquer, a partir do segundo, e o termo anterior é constante.

Sendo o número a_1, o primeiro termo da sequência, obtemos o segundo termo a_2 multiplicando o primeiro pela constante q, denominada razão na Progressão Geométrica. Por meio da recorrência, podemos escrever o n-ézimo termo da sequência, temos:

a_1 = primeiro termo da sequência

$a_2 = a_1 \cdot q$

$a_3 = a_2 \cdot q$

Substituindo o valor de a_2, que encontramos anteriormente, temos: $a_3 = (a_1 \cdot q) \cdot q \Rightarrow a_3 = a_1 \cdot q^2$

Seguindo o mesmo raciocínio, podemos encontrar o próximo termo: $a_4 = a_3 \cdot q \Rightarrow a_4 = (a_1 \cdot q^2) \cdot q \Rightarrow a_4 = a_1 \cdot q^3$

Portanto para n qualquer, temos:

$$a_n = a_{n-1} \cdot q \Rightarrow a_n = a_1 \cdot \underbrace{q \cdot \ldots \cdot q \cdot q}_{n-1 \text{ fatores}} \Rightarrow a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Desta forma, o termo a_n é definido pela seguinte equação:

$$\boldsymbol{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}} \qquad \textbf{(IV)}$$

Esta equação é denominada Fórmula do Termo Geral de uma Progressão Geométrica.

São exemplos de Progressão Geométrica:

- (1, 2, 4, 8, 16, ...) então $a_1 = 1$ e q = 2
- (-1, -2, -4, -8, -16, ...) então $a_1 = -1$ e q = 2
- $(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots)$ então $a_1 = 1$ e $q = \frac{1}{3}$
- (7, 7, 7, 7, ...) então $a_1 = 7$ e q = 1
- (3, 0, 0, 0, ...) então $a_1 = 3$ e q = 0

Exemplo 10 – Qual é o 10º termo de uma progressão geométrica cujo primeiro termo $a_1 = 5$ e a razão $q = \frac{1}{2}$?

Resolução: Utilizando a equação (IV), temos:

$$a_n = a_1 \, . \, q^{n-1}$$

$$a_{10} = 5 \, . \left(\frac{1}{2}\right)^{10-1}$$

$$a_{10} = 5 \, . \left(\frac{1}{2}\right)^{9}$$

$$a_{10} = 5 \, . \left(\frac{1}{512}\right)$$

$$a_{10} = \left(\frac{5}{512}\right)$$

Portanto, o 10º termo da P.G é: $\left(\frac{5}{512}\right)$

É importante notar, assim como a razão, a **taxa de crescimento i** de um termo para o outro de uma P.G para é constante. Essa taxa é calculada da seguinte maneira: i = $\frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1}}$. Devemos considerar que $a_n = a_1 \, . \, q^{n-1}$ e $a_{n-1} = a_1 \, . \, q^{n-2}$, sendo assim, temos:

$$i = \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1}} = \frac{a_1 \, .q^{n-1} - a_1 \, .q^{n-2}}{a_1 \, .q^{n-2}} = \frac{a_1 \, .q^{n-1}\,(1-q^{-1})}{a_1 \, .q^{n-1} \, . \, q^{-1}} = \frac{1-q^{-1}}{q^{-1}} = \frac{1-\frac{1}{q}}{\frac{1}{q}} = \left(1 - \frac{1}{q}\right) . \, q = q - 1$$

Portanto, a razão de uma progressão geométrica dada em função de sua taxa de crescimento i. Em termos gerais, temos:

$$\mathbf{q = 1 + i} \qquad \textbf{(V)}$$

Exemplo 11 – Uma determinada instituição financeira paga 0,55% de juros ao mês por uma aplicação, calculados mensalmente sobre o montante capitalizado do mês anterior. Levando em consideração que o investidor tenha aplicado R$ 2.000,00 durante 10 meses, calcule o montante resgatado no final desse período

Resolução: É possível observar que este tipo de capitalização acaba gerando uma P.G em que i = 0,55% = 0,0055 é a taxa de crescimento dos termos dessa progressão, cujo o primeiro termo é a_1 = 2000. Pelas informações fornecidas pelo enunciado, não conseguimos utilizar de cara a Fórmula do Termo Geral de uma Progressão Geométrica, em outras palavras, não conseguimos utilizar a equação (IV) pois não é fornecido a razão q. Entretanto, conseguimos escrever a razão, anteriormente, em função da taxa de crescimento (equação V), sendo assim, podemos calcular o montante resgatado no décimo mês de aplicação, dado pelo 11º termo dessa sequência:

$$a_n = a_1 \, . \, q^{n-1}$$

$$a_{11} = a_1 \, . \, (1 + i)^{11-1}$$

$$a_{11} = 2000 \, . \, (1 + 0{,}0055)^{10}$$

$$a_{11} = 2000 \, . \, (1{,}0055)^{10} \approx 2112{,}76$$

Logo, o investidor resgatou R$ 2.112,76 no décimo mês de aplicação.

4.2. JUROS COMPOSTOS

Já com os juros compostos, a remuneração é calculada sobre o montante do período anterior e, chamamos esse regime de **capitalização composta.** Em outras palavras, no final do primeiro período da capitalização é aplicado uma taxa de juros ao capital inicial, o rendimento obtido é adicionado a este capital gerando assim um novo montante (capital inicial + juros). A partir do segundo período de capitalização, a taxa de juros é aplicada ao montante produzido no final do período anterior e, posteriormente, adicionados a esse montante, gerando assim um novo montante. Os juros calculados nesse regime são denominados **juros compostos.**

Como demonstrado anteriormente, a aplicação sucessiva deste regime nos gera uma P.G, em que o primeiro termo a_0 é o capital inicial (C_0) e a razão q é igual a q = 1 + i – em que i corresponde a taxa de juros.

Levando em consideração as informações do parágrafo anterior e a Equação (IV), temos:

$$\mathrm{a_n} = \mathrm{a_0} \, . \, \mathrm{q^n}$$

$$\mathrm{a_n} = \mathrm{C_0} \, . \, (1 + \mathrm{i})^{\mathrm{n}},$$

sendo $\mathrm{a_n}$ o **Montante** ($\mathrm{M_n}$) produzido no n-ésimo período de capitalização.

Desta forma, podemos escrever desta maneira:

$$\mathbf{M_n = C_0 \, . (1 + i)^n.} \qquad \textbf{(VI)}$$

Caso necessário calcular apenas os juros gerado no final do período de capitalização basta subtrair do montante ($\mathrm{M_n}$) o capital inicial ($\mathrm{C_0}$), ou seja:

$$\mathrm{J = M_n - C_0.}$$

Utilizando a equação VI, temos:

$$\mathrm{J = C_0 \, . \, (1 + i)^n - C_0}$$

$$\mathbf{J = C_0 \, . [(1 + i)^n - 1]} \qquad \textbf{(VII)}$$

Exemplo 12 – Determine o montante de um empréstimo consignado de R$ 5.000,00, à uma taxa de juros de 1,5% ao mês, no período de 48 meses sob o regime de capitalização composta.

Resolução: Os seguintes dados foram fornecidos:

$$\begin{cases} C_0 = \text{R\$ } 5.000{,}00 \\ i = 1{,}5\% = 0{,}015 \text{ ao mês} \\ n = 48 \text{ meses} \end{cases}$$

Utilizando a Equação (VI), temos:

$$M_n = C_0 \; . \; (1 + i)^n$$

$$M_n = 5000 \; . \; (1 \; + \; 0{,}015)^{48}$$

$$M_n = 5000 \; . \; (1{,}015)^{48}$$

$$M_n = 5000 \; . \; 2{,}0434$$

$$M_n \approx 10.217{,}39$$

Logo, o montante do empréstimo é de R$ 10.217,39.

Exemplo 13 – Calcule os juros de um investimento de R$ 8.000,00 à taxa de 9% ao ano, no período de 4 anos, sob o regime de capitalização composta.

Resolução: Dados fornecidos:

$$\begin{cases} C_0 = \text{R\$ } 8.000{,}00 \\ i = 9\% = 0{,}09 \text{ ao ano} \\ n = 4 \text{ anos} \end{cases}$$

Como o enunciado pediu somente o valor dos juros gerados pelo investimento, podemos utilizar a Equação (VII), sendo assim, temos:

$$J = C_0 \; . \; [(1 + i)^n - 1]$$

$$J = 8000 \; . \; [(1 \; + \; 0{,}09)^4 - 1]$$

$$J = 8000 \; . \; [(1{,}09)^4 - 1]$$

$$J = 8000 \; . \; [1{,}411581 - 1]$$

$$J = 8000\ .[0{,}411581] \approx 3292{,}65$$

Os juros gerados pelo investimento no final dos 4 anos foram de R$ 3.292,65.

Vale ressaltar que, para efetuar o cálculo da taxa de juros i no regime de capitalização composta, podemos reescrever a Equação (VI) da seguinte maneira:

$$M_n = C_0\ .\ (1+i)^n$$

$$(1+i)^n = \frac{M_n}{C_0}$$

$$1 + i = \left(\frac{M_n}{C_0}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\mathbf{i} = \left(\frac{\mathbf{M_n}}{\mathbf{C_0}}\right)^{\boldsymbol{\frac{1}{n}}} - 1 \qquad \textbf{(VIII)}$$

Ou ainda, a partir da Equação (VII), temos:

$$J = C_0\ .\ [(1+i)^n - 1]$$

$$(1+i)^n - 1 = \frac{J}{C_0}$$

$$(1+i)^n - 1 = \frac{J}{C_0} + 1$$

$$(1+i) = [\frac{J}{C_0} + 1]^{\frac{1}{n}}$$

$$i = [\frac{J}{C_0} + 1]^{\frac{1}{n}} - 1 \qquad \textbf{(IX)}$$

Exemplo 14 – Determinado empréstimo de R$ 10.000,00 produziu após 36 meses uma dívida de R$ 15.639,44 no regime de capitalização composta. Calcule a taxa de juros do empréstimo.

Resolução: Temos:

$$\begin{cases} C_0 = \text{R\$ } 10.000{,}00 \\ M_{36} = \text{R\$ } 15.639{,}44 \\ \text{n} = 36 \text{ meses} \end{cases}$$

Utilizando a Equação (VIII), temos:

$$i = \left(\frac{M_n}{C_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

$$i = \left(\frac{M_{36}}{C_0}\right)^{\frac{1}{36}} - 1$$

$$i = \left(\frac{15.639{,}44}{10.000}\right)^{\frac{1}{36}} - 1$$

$$i = 0{,}0125 = 1{,}25\%$$

Portanto, a taxa de juros do empréstimo é de 1,25% ao mês.

4.3. CAPITALIZAÇÃO SIMPLES X CAPITALIZAÇÃO COMPOSTA

De modo geral, a diferença entre a capitalização simples e da capitalização composta está relacionada a incidência dos juros. Em outras palavras, na simples os juros sempre são calculados com base no capital inicial, consequentemente, tem um crescimento de forma linear e, portanto, é uma função afim de n da forma f(n) = an + b, n ≥ 0. Sendo assim, a partir da Equação (II), podemos escrever:

$$f(n) = C_0 \,.\, (1 + \text{ni})$$

$$f(n) = C_0 + C_0\text{ni}$$

$$f(n) = (C_0\text{i})\text{n} + C_0,$$

em que a = C_0i e b = C_0.

Já na capitalização composta, as taxas de juros são aplicadas sobre o montante inicial e acrescidas dos juros acumulados, por consequência, seu crescimento é exponencial e, portanto, é uma função exponencial da forma g(n) = b . a^n, n ≥ 0. A partir da Equação (VI), podemos escrever:

$$g(n) = C_0 \,.\, (1 + \text{i})^n,$$

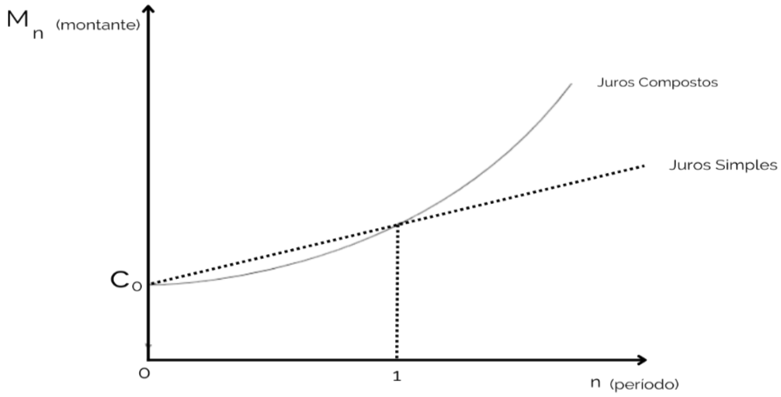
em que a = 1 + ni e b = C_0.

Baseado em Camargo (2013), podemos afirmar que:

- para n = 1, temos que f(n) = g(n), ou seja, juro simples é igual a juros compostos;
- para 0 < n > 1, temos que f(n) > g(n), ou seja, juros simples rende mais que juros compostos;
- para n > 1, temos que f(n) < g(n), ou seja, juros compostos rende mais que juros simples.

Na figura abaixo, é possível notar a representação gráfica dessas duas funções, ficando claro a diferença entre as duas de acordo com período n.

Figura 2 - Comparação entre Capitalização Simples e Capitalização Composta



Fonte: criado pelo próprio autor através do Canva

Partindo para um exemplo prático, considere um capital de R$10.000,00 aplicado à taxa de 0,5% ao mês. A tabela abaixo apresenta o crescimento do dinheiro de acordo com cada regime de capitalização.

Tabela 1 - Capitalização Simples x Capitalização Composta ($n \geq 1$)

Mês	Capitalização Simples	Capitalização Composta
0	10.000,00	10.000,00
1	10.050,00	10.050,00
2	10.100,00	10.100,25
3	10.150,00	10.150,75
4	10.200,00	10.201,50
5	10.250,00	10.252,51
6	10.300,00	10.303,77
7	10.350,00	10.355,29
8	10.400,00	10.407,07
9	10.450,00	10.459,10
10	10.500,00	10.511,40
...	...	...
99	14.950,00	16.384,76
100	15.000.00	16.466,68

Fonte: criado pelo autor

É possível notar que o crescimento do dinheiro é mais rápido quando aplicado no regime de capitalização composta. Outra observação, está relacionado ao período n, visto que, quando $n = 1$ a remuneração de ambos os regimes é igual e, quando $n > 1$, a remuneração no regime de capitalização composta é maior do que no regime de capitalização simples.

Vamos considerar agora, o mesmo capital aplicado à uma taxa de juros de 5% ao ano, porém são capitalizados mensalmente. Da mesma forma, a Tabela 2 apresenta uma comparação de rendimento entre os regimes de capitalização simples e composta para $0 < n \leq 1$.

Tabela 2 - Capitalização Simples x Capitalização Composta ($0 < n \leq 1$)

Mês	**Capitalização Simples**	**Capitalização Composta**
0	10.000,00	10.000,00
1	10.041,66	10.040,74
2	10.083,32	10.081,64
3	10.124,98	10.122,72
4	10.166,64	10.163,96
5	10.208,30	10.205,37
6	10.249,96	10.246,95
7	10.291,62	10.288,69
8	10.333,28	10.330,61
9	10.374,94	10.372,70
10	10.416,60	10.414,96
11	10.458,33	10.457,39
12	10.500,00	10.500,00

Fonte: criado pelo autor

Vale destacar que, para calcular os juros mensalmente, sendo a taxa anual, consideramos os seguintes valores para n: $\frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \frac{3}{12}, \frac{4}{12}, \frac{5}{12}, \dots, \frac{11}{12}, \frac{12}{12}$.

Como podemos observar na tabela, a remuneração no regime de capitalização simples é maior que o regime de capitalização composta. Já para n = 1 = 12/12, as remunerações são iguais.

5. TAXAS DE JUROS

A taxa de juro é um fator multiplicativo que determina o valor dos juros, isto é, a remuneração que será paga durante um determinado período de tempo em cima de uma operação financeira.

Essas taxas sempre estarão associadas a uma unidade de tempo, sejam elas: mensal (a.m.), bimestral (a.b.), semestral (a.s.), anual (a.a.), etc. Podendo ainda, ser expressa na forma percentual, decimal ou fracionária.

Como dito anteriormente, ao utilizar as fórmulas de matemática financeira, tanto o prazo da operação como a taxa de juros devem, necessariamente, ser expressas na mesma unidade de tempo. Por exemplo, os investimentos realizados em um fundo de poupança oferecem juros de 0,5% ao mês e os rendimentos são creditados mensalmente. Nessa situação, a taxa (ao mês) e o período aplicado (mensal) coincidem, atendendo assim à uma das regras básicas.

Exemplo 15 – Um capital de R$ 5.000,00 foi aplicado à taxa de juros compostos de 1,5% a.m., durante 2 anos. Determine o montante da aplicação no final desse período.

Resolução: Temos:

$$\begin{cases} C_0 = \text{R\$ } 5.000{,}00 \\ i = 1{,}5\% \text{ a.m.} = 0{,}015 \text{ a.m.} \\ \text{n} = 2 \text{ anos} = 24 \text{ meses} \end{cases}$$

Utilizando a Equação (II), temos:

$$M_n = C_0 \, . \, (1 + i)^{24}$$

$$M_n = 5.000 \, . \, (1 + 0{,}015)^{24}$$

$$M_n = 5.000 \, . \, (1{,}015)^{24}$$

$$M_n = 7.147{,}51$$

Exemplo 16 – Ao realizar uma aplicação de R$ 5.000,00 em títulos que, depois de 180 dias, renderam R$ 798,47 de juros no regime de capitalização composta. Determine a taxa mensal de juros a que esse capital esteve aplicado.

Resolução: Temos:

$$\begin{cases} C_0 = \text{R\$ } 5.000{,}00 \\ J = 798{,}47 \\ n = 180 \text{ dias} = 6 \text{ meses} \end{cases}$$

Utilizando a Equação (IX), temos:

$$i = [\frac{J}{C_0} + 1]^{\frac{1}{n}} - 1$$

$$i = [\frac{798{,}47}{5.000} + 1]^{\frac{1}{6}} - 1$$

$$i \approx 0{,}025 = 2{,}5\%$$

5.1. TAXAS PROPORCIONAIS E EQUIVALENTES

Para compreender o significado dessas duas taxas, necessariamente, deve-se reconhecer que toda operação abrange dois prazos: o prazo a que se refere a taxa de juros e o prazo de capitalização dos juros.

5.1.1. Taxas Proporcionais

No regime de capitalização simples, quando duas taxas são expressas em unidades de tempo diferentes e, incidem sobre o mesmo o mesmo capital, entretanto, produzem o mesmo montante ao fim de um mesmo período de tempo, dizemos que essas taxas são **proporcionais** (SECURATO, 2008). As taxas de juros proporcionais são aplicadas somente na capitalização simples (juros simples).

Por exemplo, sabe-se que a Caderneta de Poupança paga aos seus depositantes uma taxa de juros de 6% ao ano, sendo que o prazo de capitalização (ocorrência de juros) é mensal, através de um percentual proporcional a 0,5%. Ou seja, suponhamos que esse depositante aplique um capital de R$ 10.000,00 reais na poupança durante um ano.

Nesse caso, iremos calcular o montante gerado em duas situações: utilizando a taxa expressa ao ano e ao mês.

1º caso:

$$\begin{cases} C_0 = \text{R\$ } 10.000{,}00 \\ i = 6\% \text{ a.a.} = 0{,}06 \text{ a.a.} \\ n = 1 \text{ ano} \end{cases}$$

Com as informações acima, temos:

$$M_n = C_0 \,.\, (1 + ni)$$
$$M_1 = 10.000 \,.\, (1 + 0{,}06)$$
$$M_1 = 10.000 \,.\, (1{,}06)$$
$$M_1 = 10.600$$

2º caso:

$$\begin{cases} C_0 = \text{R\$ } 10.000{,}00 \\ i = 0{,}5\% \text{ a.m.} = 0{,}005 \text{ a.m.} \\ n = 1 \text{ ano} = 12 \text{ meses} \end{cases}$$

Neste caso, temos:

$$M_n = C_0 \,.\, (1 + ni)$$
$$M_{12} = 10.000 \,.\, (1 + 12 \,.\, 0{,}005)$$
$$M_{12} = 10.000 \,.\, (1 + 0{,}06)$$
$$M_{12} = 10.000 \,.\, (1{,}06) = 10.600$$

Em outras palavras, no regime de capitalização simples a taxa varia de forma linear em função do tempo, ou seja, para convertermos uma taxa mensal para anual, basta multiplicar a taxa mensal por 12, visto que em um ano existem 12 meses, ou se desejarmos uma taxa mensal, tendo uma taxa diária, basta multiplicarmos por 30 e assim sucessivamente (SOBRINHO, 2013).

É importante destacar, que a taxa proporcional também pode ser obtida da divisão entre a taxa de juros considerada na operação e o número de vezes em que ocorrerão os juros (periodicidade de capitalização). Por exemplo, para uma taxa de juros de 18% ao ano, se a capitalização for definida mensalmente, os juros ocorrerão 12 vezes no período de um ano, logo o percentual de juros que incidirá sobre o capital por mês será de: $\frac{18\%}{12}$ = 1,5% ao mês.

A aplicação dessas taxas, normalmente, é utilizada em: cálculo de juros de mora, descontos bancários, apuração de encargos sobre saldo devedor de conta corrente bancária, etc.

Exemplo 17 – Determine as taxas proporcionais semestralmente e mensalmente, dado a taxa de 3% a.a.

Resolução:

Taxa semestral proporcional: Sabemos que um ano possui 2 semestres (6 meses), sendo assim, basta dividir a taxa de juros considerada no exercício pelo número de vezes que ocorrerá os juros, temos: $\frac{3\%}{2}$ = 1,5% a.s.

Taxa mensal proporcional: Sabemos que um ano possui 12 meses, sendo assim, basta dividir a taxa de juros considerada no exercício pelo número de vezes que ocorrerá a capitalização, temos: $\frac{3\%}{12}$ = 0,25% a.m.

Exemplo 18 – Determine a taxa trimestral proporcional à taxa de 0,66% a.m.

Resolução:
Taxa trimestral proporcional: Como a unidade de tempo "mês" é menor que "trimestre" e, sabendo que, um trimestre equivale a 3 meses, basta multiplicarmos a taxa mensal por 3, temos: 3 . 0,66% = 1,98% a.t.

5.1.2. Taxas Equivalentes

Ao falarmos sobre taxa equivalente, devemos associar ao regime de capitalização composta, visto que esta taxa cresce exponencialmente em relação ao tempo.

Quando duas taxas expressas em unidade de tempo diferentes produzem o mesmo montante ao fim da aplicação, incidindo sobre o mesmo capital, dizemos que são **equivalentes**.

Considerando uma taxa de crescimento I relativa ao período de tempo T e uma taxa de crescimento i relativa ao período de tempo t. Se T = nt, então 1 + I = $(1 + i)^n$ (LIMA et al., 2006). De fato, utilizando a equação VI, podemos escrever:

$$C_0 . (1 + I)^1 = C_0 . (1 + i)^n$$
$$1 + I = (1 + i)^n. \qquad \textbf{(X)}$$

Exemplo 19 – Determine a taxa equivalente diária à taxa de 8,9% a.m.

Resolução: Quando utilizado dias corridos, na Matemática Financeira, consideramos um mês com 30 dias (mês comercial).

$$1 + I = (1 + i)^n$$
$$1 + 0{,}089 = (1 + i)^{30}$$

$$1{,}089 = (1 + i)^{30}$$

$$1 + i = 1{,}089^{\frac{1}{30}}$$

$$i = 1{,}089^{\frac{1}{30}} - 1$$

$$i \approx 0{,}0028 = 0{,}28\% \text{ a.d.}$$

5.2. TAXAS NOMINAL E EFETIVA

5.2.1. Taxa Nominal

Quando o rendimento de sua aplicação ocorre em uma unidade de tempo diferente da unidade expressa na taxa, chamamos de **taxa nominal**. Por exemplo:

- Uma taxa de 0,5% a.m. capitalizada diariamente;
- Uma taxa de 10% a.a. capitalizada mensalmente.

Entretanto, como descrito anteriormente, para calcularmos o montante de um investimento financeiro ou, até mesmo, os juros obtidos no final do período de aplicação, é preciso que a taxa de juros e o período da capitalização sejam expressos na mesma unidade de tempo. Com isso, podemos concluir que a taxa nominal não é utilizada para efetuar cálculos de juros.

De maneira geral, a taxa nominal é utilizada pelas instituições financeiras na apresentação de contratos. Utilizada como forma de determinar uma visão geral do valor final do contrato.

5.2.2. Taxa Efetiva

A **taxa efetiva** é aquela em que a unidade de tempo da capitalização coincide com a unidade que a taxa está referida. Por exemplo:

- Uma taxa de 5% a.m. capitalizada mensalmente;
- Uma taxa de 20% a.a. capitalizada anualmente.

Quando a taxa de uma operação financeira é dada na forma de taxa nominal precisamos convertê-la para taxa efetiva para que seja possível calcular a capitalização dos juros.

Exemplo 20 – Uma determinada aplicação paga uma taxa de juros composta de 12,70% a.a., com capitalização mensal. Calcule os juros obtidos em uma aplicação de R$ 5.000,00 no prazo de 10 meses.

Resolução: Temos:

$$\begin{cases} C_0 = \text{R\$ } 5.000,00 \\ i = 12,70\% \text{ a.a.} = \frac{0,1270}{12} \text{ a.m.} \\ n = 10 \text{ meses} \end{cases}$$

A taxa fornecida pelo enunciado de 12,70% a.a. é uma taxa nominal com capitalização mensal. Necessariamente, precisamos converter essa taxa nominal para taxa efetiva, nessa situação, a taxa efetiva mensal é igual a $\frac{1}{12}$ da taxa anual, sendo assim: $\frac{1}{12}$. 12,70% = $\frac{0,1270}{12}$.

Substituindo na equação VI, temos:

$$M_n = C_0 \cdot (1 + i)^n$$

$$M_{10} = 5.000 \cdot (1 + \frac{0,1270}{12})^{10}$$

$$M_{10} \approx 5.555,09$$

Podemos ainda, determinar a taxa efetiva anual da operação utilizando a equação IX, temos:

$$1 + I = (1 + i)^n$$

$$1 + I = (1 + \frac{0,1270}{12})^{12}$$

$$I = (1 + \frac{0,1270}{12})^{12} - 1$$

$$I = 0,1346 = 13,46\%$$

Note que a taxa nominal de 12,70% a.a produz uma taxa efetiva anual de 13,46%.

5.3. TAXA POR DIA ÚTIL (D.U)

Também conhecida como Taxa Over, comumente utilizada em operações financeiras de curto prazo. A capitalização desta taxa, em uma determinada aplicação, é válida somente para os dias úteis (dias de funcionamento do mercado financeiro). Se trata então de uma taxa de juros nominal, com capitalização diária, sendo de costume, ser expressa ao mês.

Um exemplo é a taxa de juros do cheque especial, normalmente indexada pela Taxa Over. Ela também pode ser encontrada em investimentos, como exemplo o CDI Over, que possui rentabilidade diária.

É necessário se atentar ao circular do Banco Central do Brasil (Circ. 2.761/1997) que determina o padrão de 252 dias úteis para um ano e 21 dias úteis para um mês.

Outro exemplo muito comum, é os certificados emitido pelos bancos (denominado Certificado de Depósito Interbancário – CDI) para outros bancos em troca de dinheiro, sendo que, no dia seguinte, o dinheiro acrescido dos juros acordados no momento da negociação é devolvido. A taxa Selic, é um exemplo de Taxa Over.

5.3.1. Taxa Selic

O nome desta taxa vem da sigla do Sistema Especial de Liquidação e de Custódia. De forma geral, a taxa média ajustada dos financiamentos diários apurados nesse sistema corresponde à taxa Selic. A meta da taxa Selic é fixada pelo Comitê de Política Monetária (Copom) em reuniões periódicas.

A Selic é a taxa básica de juros da economia, sendo o principal instrumento de política monetária utilizada pelo Banco Central (BC) para controle da inflação (BANCO CENTRAL DO BRASIL, 2007). Vale ressaltar que as taxas de juros de empréstimos, dos financiamentos e das aplicações financeiras sofrem forte influência da Taxa Selic.

Na prática, funciona da seguinte forma: quando a taxa Selic sobe, os juros cobrados nos financiamentos, empréstimos e cartões de créditos ficam mais altos desestimulando assim o consumo, mecanismo utilizado para frear a inflação. Por outro lado, quando a taxa Selic cai, os juros cobrados nas operações de empréstimos ficam menores, o que de certa forma, contribui para o fluxo da moeda na economia, estimulando o consumo da população.

Exemplo 21 – Considerando a meta divulgada pelo Copom, em uma de suas reuniões, da taxa Selic de 11% a.a., calcule a taxa equivalente por dia útil.

Resolução: Utilizando a equação IX, temos:

$$1 + I = (1 + i)^{n}$$

$$1 + 0{,}11 = (1 + i)^{252}$$

$$(1 + i)^{252} = 1{,}11$$

$$1 + i = 1{,}11^{\frac{1}{252}}$$

$$i = 1{,}11^{\frac{1}{252}} - 1$$

$$i \approx 0{,}0004 = 0{,}04\% \text{ a.d.u (ao dia útil)}$$

5.3.2. Quantidade de dias úteis entre duas datas

Para calcular o rendimento de um título público prefixado, como veremos nos próximos capítulos, que possui rentabilidade definida no ato da compra, o investidor deverá, necessariamente, calcular o número de dias úteis entre a data da compra do título e a data de vencimento (estabelecida no ato da compra). Afim de facilitar o trabalho, iremos explorar o uso de planilha eletrônica, especificamente, Microsoft Office Excel 2019. Com o uso da função "Dia Trabalho Total".

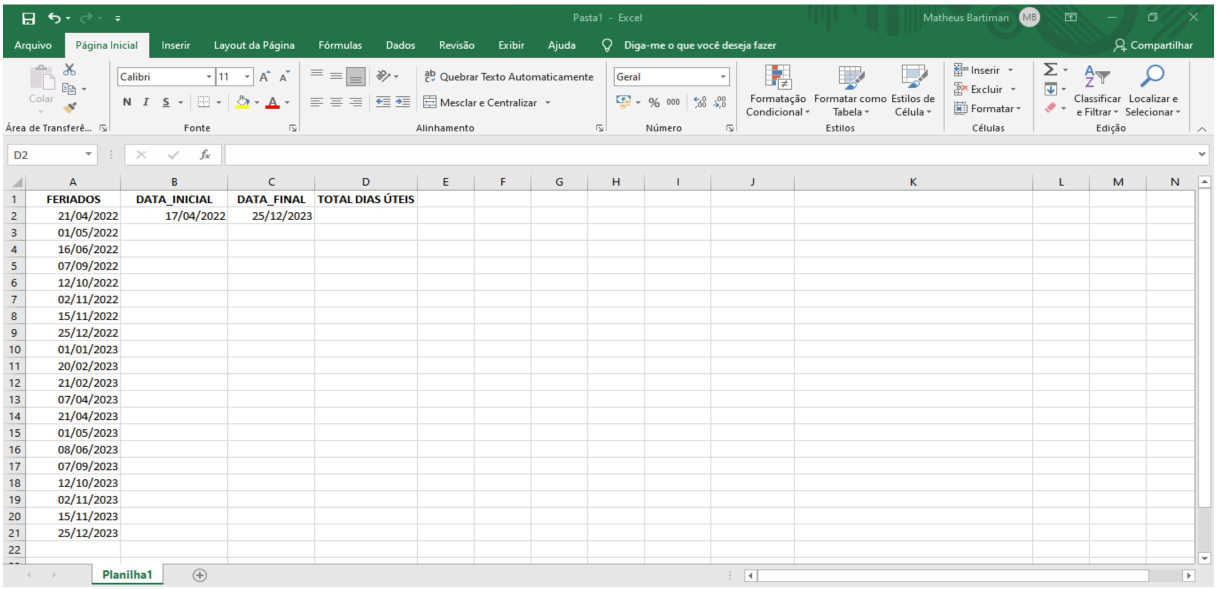
Entretanto, ao utilizar essa função é necessário informar todos os feriados oficiais, visto que não são considerados dias úteis. Para isso, iremos utilizar uma relação de feriados bancários, disponibilizada pela Associação Brasileira das Entidades dos Mercados Financeiro e de Capitais (ANBIMA), disponível em seu próprio site.

Exemplo 22 – Calcular a quantidade de dias úteis entre a Páscoa de 2022 até o Natal de 2023.

Resolução:

Após baixar a relação de feriados nacionais, abra uma planilha no Excel 2019 e compile as datas de todos os feriados nacionais de 17/04/2022 à 25/12/2023 na coluna A. Na célula B2 insira a data inicial do período (17/04/2022) e na célula C2, a data final (25/12/2023). Observe a figura 3:

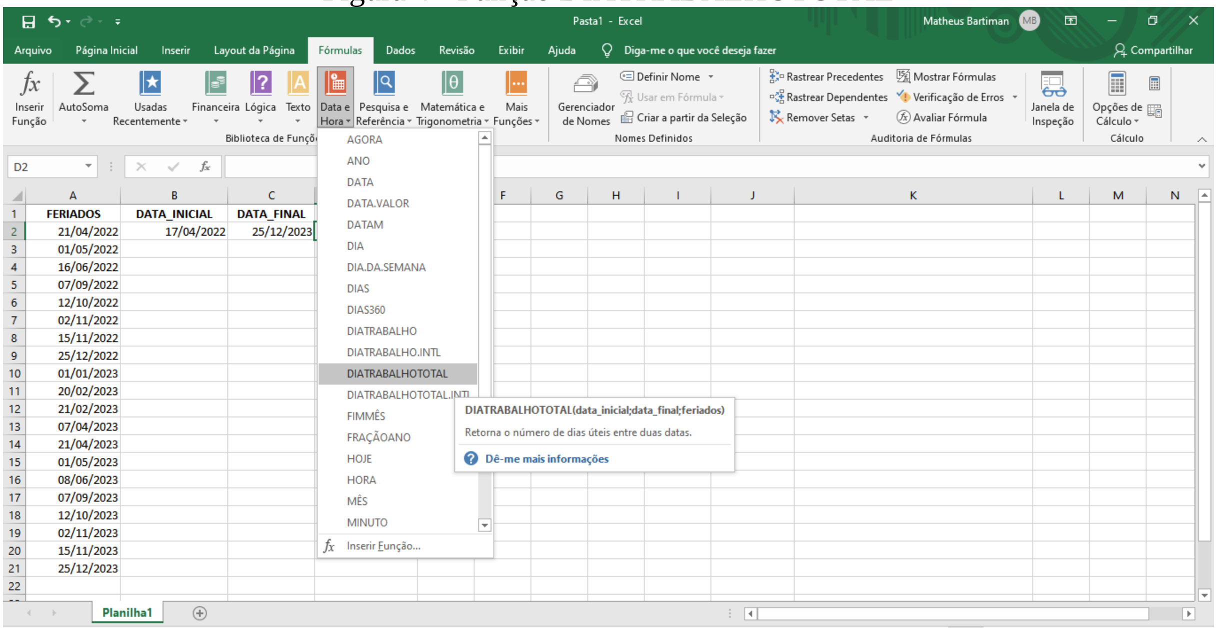
Figura 3 - Feriados Bancários entre 17/04/2022 a 25/12/2023



Fonte: criado pelo autor no Excel 2019

Selecionando a célula D2, iremos aplicar a fórmula que será utilizada. No menu "Fórmulas" em "Data e Hora" vamos selecionar "DIATRABALHOTOTAL". Veja a figura 4:

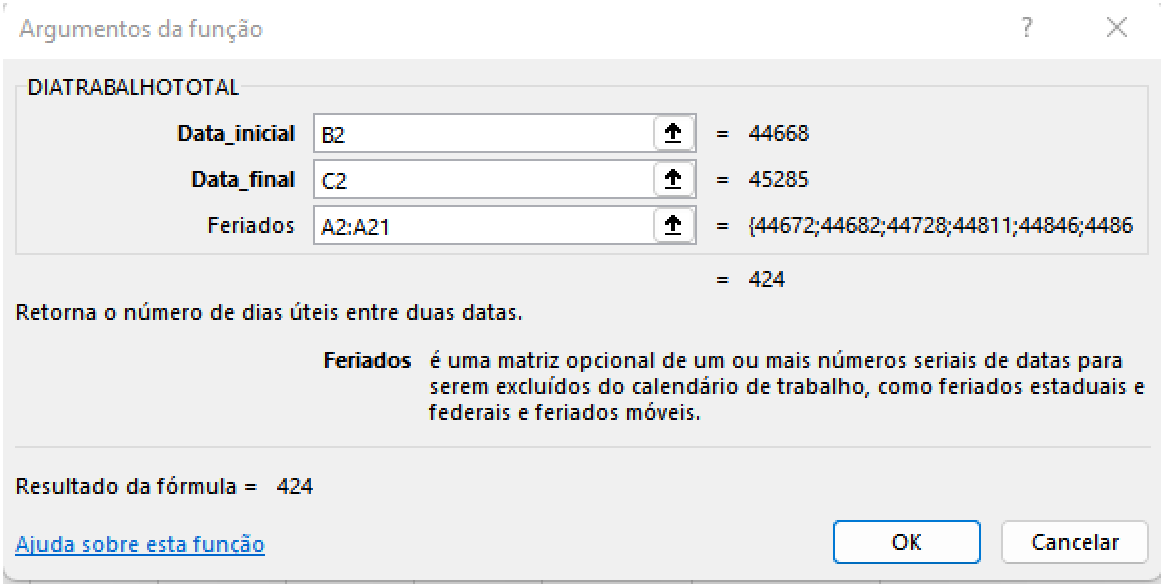
Figura 4 - Função DIATRABALHOTOTAL



Fonte: criado pelo autor no Excel 2019

Na janela **Argumentos da função** (figura 5), digite B2 no campo **Data_inicial, C2** no campo **Data_final** e A2:A21 no campo **Feriado**, em seguida, clique em **OK**.

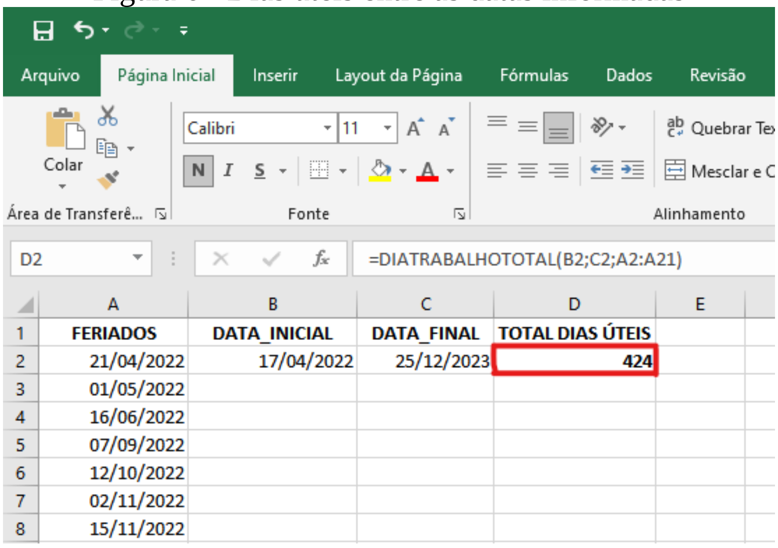
Figura 5 - Argumentos da função



Fonte: criado pelo autor no Excel 2019

Por fim, a função retorna, na célula D2, a quantidade de dias úteis entre as datas consideradas no cálculo. Veja figura 6:

Figura 6 - Dias úteis entre as datas informadas



Fonte: criado pelo autor no Excel 2019

5.4. TAXAS VARIÁVEIS

Se um capital inicial C_0 for aplicado a n taxas distintas efetivas $i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n$, durante um período n, com capitalização composta, temos no final desse período:

$$M_0 = C_0$$

$$M_1 = C_0 + C_0 \cdot i_1 = C_0\,(1 + i_1)$$

$$M_2 = C_0\,(1 + i_1) + C_0\,(1 + i_1) \cdot i_2 = C_0\,(1 + i_1)\,(1 + i_2)$$

$$M_3 = C_0\,(1 + i_1)\,(1 + i_2) + C_0\,(1 + i_1)\,(1 + i_2) \cdot i_3 = C_0\,(1 + i_1)\,(1 + i_2)\,(1 + i_3)$$

...

$$M_n = C_0\,(1 + i_1)\,(1 + i_2)\,(1 + i_3)\ldots(1 + i_n) \qquad \textbf{(XI)}$$

Exemplo 23 – João Aplicou R$ 1.500,00 durante 4 meses em um produto financeiro com taxas mensais variáveis. As taxas efetivas desse período estão mostradas na tabela abaixo:

1º mês	2º mês	3º mês	4º mês
0,5467%	0,5857%	0,5805%	0,5701%

Calcule o montante dessa aplicação.

Resolução: Utilizando equação XI, temos:

$$M_n = C_0\,(1 + i_1)\,(1 + i_2)\,(1 + i_3)\ldots(1 + i_n)$$

$$M_4 = C_0\,(1 + i_1)\,(1 + i_2)\,(1 + i_3)\,(1 + i_4)$$

$$M_4 = 1.200\ .\ (1 + 0{,}005467)\,(1 + 0{,}005857)\,(1 + 0{,}005805)\,(1 + 0{,}005701)$$

$$M_4 = 1.200\ .\ (1{,}005467)\,(1{,}005857)\,(1{,}005805)\,(1{,}005701) \approx 1.227{,}63$$

6. CADERNETA DE POUPANÇA

> Falar da origem das contas de poupança no Brasil é falar da primeira caixa econômica garantida pelo governo, criada no País. A origem destas duas instituições é entrelaçada. Pode-se afirmar que a caixa econômica foi criada para, principalmente, recolher os depósitos de poupança popular no Brasil. Esta associação de que estamos tratand pode ser percebida por meio da leitura de alguns trechos do decreto do Imperador Dom Pedro II criando a Caixa Econômica da Corte. [...] é interessante notar como o discurso dos criadores da caixa voltava-se para as camadas populares. Tinha-se em mente atingir os mais pobres. (LUZIO, 2014)

Grande parte da população brasileira não possui o habito de poupar dinheiro. Uma pesquisa feita pela Confederação Nacional de Dirigentes Lojistas e pelo Serviço de Proteção ao Crédito, expôs que 4 em 10 pessoas realizam aplicações periódicas, sendo que 90% dessas pessoas que aplicam dinheiro, afirmam utilizarem apenas a caderneta de poupança. O que nos submete a seguinte afirmação: a caderneta de poupança ainda é a forma mais popular de aplicação financeira. Isso pode ser explicado pela praticidade e liquidez apresentada por esta modalidade de investimento.

O art. 12 da Lei nº 8.177, de 1 de março de 1991, com redação dada pela Lei nº 12.703, de 2012, garante a remuneração da poupança. Levando em consideração a legislação vigente, os depósitos de poupança de pessoas físicas são remunerados considerando as seguintes circunstancias:

1. remuneração básica, dada pela Taxa Referencial (TR) na data de aniversário da aplicação, e
2. remuneração adicional, por juros de:
   a) 0,5% (cinco décimos por cento) ao mês, enquanto a meta da Taxa Selic ao ano, definida pelo Banco Central, for superior a 8,5%; ou
   b) 70% da meta da Taxa Selic ao ano, enquanto a meta da Taxa Selic ao ano for igual ou inferior a 8,5%.

Levando em consideração o cenário atual, na qual a Taxa Selic está em 13,75%, ou seja, maior que 8,5%, o rendimento será: 0,5% a.m. + TR.

O dinheiro ali aplicado terá o seu rendimento a cada 30 dias, no chamado aniversário da poupança. Logo, se você aplicar um certo capital no dia 20 de janeiro e realizar a retirada desse valor no dia 19 de fevereiro, não haverá rentabilidade alguma sobre o valor.

Podemos listar como vantagens dos depósitos de poupança para pessoas físicas: isenção de cobrança de Imposto de Renda (IR) sobre a remuneração e a não incidência de Imposto sobre Operações Financeiras (IOF). Além disso, o dinheiro depositado na poupança é garantido pelo Fundo Garantidor de Crédito (FGC), em outras palavras, no caso de falência do banco o FGC garante que o investidor receberá até a quantia de R$ 250.000,00, sendo assim um investimento de baixo risco.

E uma desvantagem da caderneta de poupança é que se o investidor sacar o dinheiro antes da data de aniversário, como explicado anteriormente, ele não receberá os juros do período, ou seja, o valor deixado pelo investidor na poupança não terá rendimento em virtude do saque. Ainda, existe chance de perder dinheiro nessa aplicação, visto que o rendimento da poupança pode ser tão baixo a ponto de não conseguir cobrir o efeito da inflação, ou seja, caso a inflação for superior ao percentual de rentabilidade esperada, o dinheiro aplicado valerá menos do que valia anteriormente.

Exemplo 24 – Um investidor pessoa física depositou na conta poupança uma quantia de R$ 2.000,00 por 5 meses. A meta da Taxa Selic manteve-se em 10,4% a.a. Os valores de TR mensais estão indicados na tabela abaixo:

1º mês	**2º mês**	**3º mês**	**4º mês**	**5º mês**
0,1126%	0,0537%	0,0266%	0,0459%	0,0604%

Considerando que não tenha ocorrido saque nesse período, determine:

a) o valor disponível para saque após os cinco meses de aplicação.

Resolução: Como a meta da Taxa Selic está acima de 8,5%, a remuneração da poupança é igual a TR mais 0,5% a.m.

$$\begin{cases} C_0 = \text{R\$ } 2.000.00 \\ n = 5 \text{ meses} \\ i = 0{,}5\% \text{ a.m.} = 0{,}005 \\ i_1 = 0{,}1126\% \text{ a.m} \\ i_2 = 0{,}0537\% \text{ a.m} \\ i_3 = 0{,}0266\% \text{ a.m} \\ i_4 = 0{,}0459\% \text{ a.m} \\ i_5 = 0{,}0604\% \text{ a.m} \end{cases}$$

a) Devemos aplicar a equação XI, por se tratar de taxas variáveis, obteremos assim o montante para saque após o prazo determinado.

$$M_5 = C_0(1 + i)(1 + i_1)(1 + i)(1 + i_2)(1 + i)(1 + i_3)(1 + i)(1 + i_4)(1 + i)(1 + i_5)$$

$M_5 = C_0(1 + i)^5(1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3)(1 + i_4)(1 + i_5)$

$M_5 = 2.000(1{,}005)^5(1{,}001126)(1{,}000537)(1{,}000266)(1{,}000459)(1{,}000604)$

$M_5 \approx 2.056{,}64$

Exemplo 25 – Marcos aplicou R$ 4.000,00 na caderneta de poupança por 7 meses. A meta da Taxa Selic nos três primeiros meses permaneceu em 8,0% a.a. e nos quatro últimos meses, 9,5% a.a. Na tabela abaixo são dados os valores da TR para esse período:

1º mês	**2º mês**	**3º mês**	**4º mês**	**5º mês**	**6º mês**	**7º mês**
0,0886%	0,0795%	0,0533%	0,0809%	0,0807%	0,1054%	0,1192%

De acordo com as informações fornecidas acima, e considerando que não houve saque durante o período, calcule:

a) o montante resgatado por Marcos ao fim da aplicação.

Resolução:

Nos três primeiros meses a Taxa Selic era inferior a 8,5%, portanto, a remuneração era igual a 70% da meta da taxa mais TR.

70% de 8,0% = 0,70 . 0,08 = 0,056 = 5,6% a.a.

Calculando a taxa equivalente ao mês para 5,6% a.a., temos:

$$1 + I = (1 + i)^n$$

$$1 + 0{,}056 = (1 + i)^{12}$$

$$i = 1{,}056^{\frac{1}{12}} - 1$$

$$i = 0{,}0045 = 0{,}45\% \text{ a.m.}$$

Sendo assim, para os três primeiros meses, teremos:

$$\begin{cases} C_0 = \text{R\$ } 2.000.00 \\ n = 5 \text{ meses} \\ i = 0{,}5\% \text{ a.m.} = 0{,}005 \\ i_1 = 0{,}1126\% \text{ a.m} \\ i_2 = 0{,}0537\% \text{ a.m} \\ i_3 = 0{,}0266\% \text{ a.m} \end{cases}$$

Utilizando a Equação (XI), podemos calcular o montante da aplicação após os três primeiros meses.

$M_3 = C_0(1 + i)(1 + i_1)(1 + i)(1 + i_2)(1 + i)(1 + i_3)$

$$M_3 = C_0(1 + i)^3(1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3)$$
$$M_3 = 4.000\ (1{,}0045)^3(1{,}000886)(1{,}000795)(1{,}000533)$$
$$M_5 \approx 4.063{,}14$$

Bastando agora calcular para os quatro meses restantes. Como a taxa Selic foi superior a 8,5% a remuneração é igual a 0,5% mais TR. Sendo assim, temos:

$$\begin{cases} M_3 = \text{R\$ } 4.063{,}14 \\ i = 0{,}5\% \text{ a.m.} = 0{,}005 \\ i_4 = 0{,}0809\% \text{ a.m} \\ i_5 = 0{,}0807\% \text{ a.m} \\ i_6 = 0{,}1054\% \text{ a.m} \\ i_7 = 0{,}1192\% \text{ a.m} \end{cases}$$

Utilizando ainda, a mesma equação, temos:

$$M_7 = M_3(1 + i)(1 + i_4)(1 + i)(1 + i_5)(1 + i)(1 + i_6)(1 + i)(1 + i_7)$$
$$M_7 = M_3(1 + i)^4(1 + i_4)(1 + i_5)(1 + i_6)(1 + i_7)$$
$$M_7 = 4.063{,}14\ (1{,}005)^4(1{,}000809)(1{,}000807)(1{,}001054)(1{,}001192) \approx 4.161{,}04$$

Logo, o montante resgatado por Marcos após os sete meses de aplicação foi de R$ 4.161,04.

6.1. INFLAÇÃO

> [...] pode ser definida como um aumento generalizado de preços que influencia no custo do dinheiro ao final de um período, fazendo, dessa forma, com que os agentes de uma economia percam parte do poder aquisitivo que detinham no transcorrer do tempo. (CAMARGO, 2013, P.107)

Os índices de preços responsáveis por medir a inflação é resultante de um procedimento estatístico que, entre outras aplicações, permite medir a variação média dos preços de uma determinada cesta de produtos, designando assim um aumento generalizado de preços de bens e serviços. Sendo assim, inflação representa um aumento de custo de vida, em contra partida, indica redução no poder de compra da moeda.

No Brasil, são utilizados inúmeros índices de preços, elaborados por diferentes instituições de pesquisa. Entretanto, a inflação brasileira é calculada com base no IPCA e no INPC – índices que estabelece relações entre a renda das famílias e o consumo.

O Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA) foi adotado pelo Conselho Monetário Nacional (CMN) como referência para o sistema de metas de inflação. Calculado pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), nas grandes regiões metropolitanas, abrangendo diferentes faixas de renda, até 40 salários mínimos, de acordo com GERIN-BACEN (2014).

A coleta dos preços para a pesquisa é realizada em estabelecimentos comerciais e de prestação de serviços, concessionária de serviços públicos e internet. Esta pesquisa leva em consideração grupos de produtos e/ou bens e serviços, tais como: alimentação e bebida, habitação, artigos de residência, vestuário, transporte, saúde e cuidados pessoais, despesas pessoais, educação e comunicação.

Existem, ainda, outros índices de preços tais como o Índice Geral de Preços – Mercado (IGP-M) – a cesta de produtos e serviços atrelados a este índice é maior do que a do IPCA, visto que inclui bens industriais, matérias-primas e, até mesmo, produtos ligados ao consumidor final. Outro indicador é o Índice Geral de Preços – Disponibilidade Interna (IGP-DI) que mede o comportamento geral da economia brasileira. Ambos são calculados pela Fundação Getúlio Vargas (FGV), dentre outros que medem o comportamento especifico de uma determinada cesta de bens e serviços.

Nesse contexto, é importante destacar a **taxa real** – taxa efetiva que se obtém descontando a inflação do período. Ao realizar um determinado investimento, é importante se atentar a taxa real, visto que ela indicara a rentabilidade de seus investimentos, já descontado a inflação, ou seja, ela irá refletir o quanto de dinheiro você realmente ganhou com uma determinada operação.

Devemos ter cautela com a rentabilidade de alguns investimentos financeiros, caso o efeito da inflação não for considerado, uma vez que pode gerar uma falsa aparência de rentabilidade atrativa.

Um ponto negativo da caderneta de poupança está relacionado com a baixa rentabilidade real, já que os efeitos causados pela inflação não são considerados na remuneração do investidor.

7. TÍTULOS PÚBLICOS FEDERAIS

7.1. LETRAS DO TESOURO NACIONAL (LTN)

A Letra do Tesouro Nacional (LTN) é um título público prefixado, ou seja, a taxa é conhecida pelo investidor no momento da aplicação. Sendo assim, quando o investidor realiza a compra uma Letra do Tesouro Nacional, especificamente, já sabe quanto receberá no vencimento desse investimento. Sendo assim a LTN é interessante para os investidores que podem esperar até o final do vencimento, visto que se o investidor comprar a LTN e mantiver esse investimento até a data acordada no momento da aplicação, ou seja, não realizar venda antecipada, receberá o valor de R$1.000,00. Esse valor é denominado **valor de face** ou **valor nominal** – montante que será resgatado no vencimento do papel. A rentabilidade do título nada mais é que a diferença entre o valor investido na compra e o valor da face.

7.1.1. Rentabilidade bruta de taxa de rentabilidade equivalente anual

Ao realizar investimentos em títulos públicos estamos sujeitos a incidência de Imposto de Renda (IR) sobre os juros e até mesmo outras taxas podem ser cobradas, o que acaba reduzindo o lucro do investimento. A **rentabilidade bruta** é igual à taxa efetiva no período de aplicação sem considerar as deduções de impostos e taxas sobre o investimento.

A rentabilidade bruta pode ser calculada utilizando a equação VIII para n = 1, visto que a taxa será calculada durante um único período – data de compra até data de vencimento. Logo, podemos reescrever a equação VIII, temos:

$$\mathrm{i}_{\mathrm{RB}} = \frac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{C}} - 1, \qquad \textbf{(XII)}$$

onde:

i_{RB} = rentabilidade bruta.

M = montante recebido na data de vencimento

C = valor investido (ou preço de compra do título)

Exemplo 25 – Um investidor comprou uma LTN em fevereiro de 2022, com vencimento em janeiro de 2025, por R$ 827,13 e pretende mantê-la até o vencimento. Calcule a rentabilidade bruta de aplicação no período.

Resolução: Considerando as informações fornecidas no enunciado, temos:

$$\begin{cases} C = \text{R\$ } 827{,}13 \\ M = 1.000{,}00 \end{cases}$$

utilizando a equação XII, temos:

$$i_{RB} = \frac{M}{C} - 1$$

$$i_{RB} = \frac{1.000}{827{,}13} - 1$$

$$i_{RB} \approx 0{,}2089 = 20{,}89\% \text{ ao período}$$

7.1.2. Tributação sobre a rentabilidade dos títulos

7.1.2.1 Imposto de Renda

Sobre os rendimentos de aplicações em títulos públicos há incidência de Imposto de Renda. Na compra de uma LTN, não acontece diferente, o IR é cobrado na venda antecipada do título ou no vencimento. A alíquota desse imposto é regressiva, ou seja, quanto mais tempo o título ficar com você, menor será a alíquota do Imposto de Renda, as alíquotas estão dispostas da seguinte maneira:

Tabela 3 - Tabela regressiva de Imposto de Renda

Alíquota	Prazo (Dias)
22,5%	180 ou menos
20,0%	181 a 360
17,5%	361 a 720
15%	721 ou mais

Fonte: Adaptado pelo autor de Tesouro Direto, 2022

Exemplo 26 – Pedro fez um investimento no Tesouro Direto comprando cinco Letras do Tesouro Nacional (LTN) com vencimento em 10 de janeiro de 2026, no dia 30 de janeiro de 2022, no valor de R$ 726,14 cada. Caso Pedro mantenha os títulos até o vencimento, quanto ele pagará de IR sobre a aplicação?

Resolução: Sabendo que Pedro comprou cinco unidades de LTN, o valor investido foi de 5 . 726,14 = 3.630,70 reais. Na data de vencimento Pedro receberá 5 . 1000 = 5.000,00 reais, ou seja, cinco vezes o valor de face do título. Portanto o rendimento da aplicação será 5.000 – 3.630,70 = 1.369,30 reais. Como a aplicação terá duração de aproximadamente 1441 dias, ou seja, superior a 720 dias a alíquota será de 15%. Sendo assim, o valor que Pedro irá pagar de IR será: 15% . 1.369,30 = 0,15 . 1.369,30 = 205,39 reais.

7.1.2.2 Imposto sobre operação Financeira (IOF)

Para os títulos públicos resgatados em menos de 30 dias, além do Imposto de Renda, incidirá também o Imposto sobre Operações Financeiras (IOF). A Receita Federal por meio do Decreto nº 6.306/2007, divulgou uma tabela para cobrança de IOF sobre o rendimento bruto (Tabela 4), especificamente, dos títulos públicos. Caso um investidor resgatar o título, como a LTN, em 15 dias corridos, haverá incidência de 50% de imposto sobre o rendimento bruto. Apenas a partir do 30º dia não haverá mais cobrança de IOF sobre o rendimento.

Tabela 4 - Tabela regressiva de Imposto sobre Operações Financeiras

Dias Corridos	Limite de Rendimento (%)	Dias Corridos	Limite de Rendimento (%)
1	96	16	46
2	93	17	43
3	90	18	40
4	86	19	36
5	83	20	33
6	80	21	30
7	76	22	26
8	73	23	23
9	70	24	20
10	66	25	16
11	63	26	13
12	60	27	10
13	56	28	06
14	53	29	03
15	50	30	00

Fonte: Adaptado pelo autor de BRASÍLIA, 2007

Exemplo 27 – Um investidor comprou uma LTN, pelo preço de R$ 701,22 e precisou vende-la 20 dias após a compra por R$ 704,55. O período de aplicação foi de 10 dias a contar da data de liquidação até a data da venda. Considerando as condições dadas, calcule:

a) a rentabilidade bruta do investimento;
b) o Imposto de Renda incidente sobre a rentabilidade bruta;
c) o valor pago de IOF sobre a operação;
d) o montante liquido do investimento descontando o IR e o IOF.

Resolução: (a) Utilizando a equação XII, temos:

$$i_{RB} = \frac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{C}} - 1$$

$$i_{RB} = \frac{\mathbf{704{,}55}}{\mathbf{701{,}22}} - 1$$

$$i_{RB} = 0{,}0047 = 0{,}47\%$$

(b) Levando em consideração que a aplicação durou 20, a alíquota que incidirá sobre tal operação é 22,5%, visto que essa alíquota se refere a aplicações até 180 dias. Portanto o IR pago, foi de 0,225 . (704,55 – 701,22) = 0,225 . 3,33 = 0,74 centavos.

(c) Levando em consideração a Tabela 4, temos que o IOF sobre a operação resgatada em 20 dias corridos será de 33%. Sendo assim, o valor pago foi de 0,33 . (704,55 – 701,22) = 0,33 . 3,33 = 1,09 reais.

(d) Desconsiderando o IR e o IOF do valor obtido com a venda da LTN, o montante líquido do investimento foi de 704,55 – 1,09 – 0,74 = 702,72 reais. Logo, o investidor teve um lucro de R$ 1,50.

7.2. NOTAS DO TESOURO NACIONAL – SERIE F (NTN-F)

A Nota do tesouro Nacional – Série F (NTN-F) é um título público com valor nominal de R$ 1.000,00, assim como a Letra do Tesouro Nacional (LTN), a diferença entre os dois títulos está relacionada ao pagamento da taxa de juros, visto que na NTN-F, a taxa dos cupons de juros é paga semestralmente, atualmente, a uma taxa efetiva de 10% a.a. Os cupons de juros são pagos retrospectivamente a cada seis meses, sendo que o último cupom de juros coincide com a data de vencimento do título. Vale ressaltar que há incidência de Imposto de Renda em cada pagamento semestral.

7.2.1. Calculo do cupom de juros

Inicialmente, precisamos entender como se calcula o valor dos cupons de juros semestrais. Como a taxa dos cupons de juros é uma taxa efetiva anual, precisamos determinar a taxa equivalente a um semestre. Sendo assim, utilizando a equação X, temos:

$$1 + I = (1 + i)^n$$

$$1 + 0{,}10 = (1 + i)^2$$

$$(1 + i) = (1{,}10)^{\frac{1}{2}}$$

$$i = (1{,}10)^{\frac{1}{2}} - 1$$

$$i \approx 0{,}04880885 = 4{,}880885\% \text{ a.s.}$$

O valor dos cupons de juros semestrais é sempre calculado sobre o valor nominal do título (R$ 1.000,00), portanto, temos:

$$\text{Cupom de juros} = 1.000 \ . \ 0{,}04880885 = 48{,}80885$$

Na data de vencimento da Nota do Tesouro Nacional – Série F (NTN-F) o investidor receberá R$ 1.000,00 mais o cupom de juros de R$ 48,80885 correspondente a essa data. Logo, ao somar os cupons de juros recebidos nos semestres anteriores obtém-se o montante total recebido pelo título.

7.3. LETRAS FINANCEIRAS DO TESOURO (LFT)

A Letra Financeira do Tesouro (LFT), diferentemente dos outros dois abordados acima, é um título público pós-fixado sem cupons de juros, consequentemente, o seu valor de resgate só será conhecido no vencimento do título. Outra informação importante é que o Tesouro Nacional estabeleceu que o valor nominal de uma unidade de LFT é R$ 1.000,00 na data-base de 1º de julho de 2000. A partir dessa data esse valor é atualizado pela Taxa Selic diária, podendo ser aplicado ágio ou deságio sobre esse Valor Nominal Atualizado (VNA) do título. Ágio e deságio, respectivamente, implicam em uma taxa deduzida ou acrescida da variação da Taxa Selic diária, se relacionando diretamente com demanda de LFT (TESOURO NACIONAL, 2022)

Outro índice importante, é o índice Selic acumulado, que será denominado como Fator Selic Acumulado ($i_{(FSA)}$). Vale ressaltar, que esse índice pode ser obtido no sítio eletrônico do Banco Central do Brasil (Bacen). É obtido pela seguinte fórmula:

$$i_{(FSA)} = (1 + i_1)\,(1 + i_2)\,(1 + i_3)\,(1 + i_4)\ldots(1 + i_n) \qquad \textbf{(XIII)}$$

7.3.1. Cálculo do preço da Letra Financeira do Tesouro

O Valor Nominal Atualizado (VNA) de uma Letra Financeira do Tesouro (LFT) é igual ao produto do valor nominal em 01/07/2000 pelo Fator da Selic Acumulado entre 01/07/2000 e a data de atualização.

$$\text{VNA} = 1.000{,}00 \,.\, i_{(FSA)} \qquad \textbf{(XIV)}$$

Não existindo ágio nem deságio, o preço da LFT é obtido de uma projeção do VNA do título na data da compra para a data de liquidação. Como não é possível determinar a taxa Selic diária para uma data futura, ou seja, a data da liquidação, calcula-se a taxa projetada a partir da meta da taxa Selic anual para o período, definida pelo Banco Central.

A meta da taxa Selic é uma taxa efetiva anual, utilizando a equação X, encontramos a taxa equivalente diária.

$$1 + \text{I} = (1 + \text{i})^{\text{n}}$$

$$1 + I_{(meta\,selic)} = (1 + i_{(du)})^{252}$$

$$1 + i_{(du)} = (1 + I_{(meta\,selic)})^{\frac{1}{252}}$$

$$i_{(du)} = (1 + I_{(meta\,selic)})^{\frac{1}{252}} - 1$$

em que $i_{(du)}$ é a taxa por dia útil equivalente à meta da taxa Selic.

Considerando o VNA na data da compra como um capital que será investido por um dia à taxa de $i_{(du)}$, o valor a ser pago na data de liquidação do título é igual ao montante composto para essa aplicação. Reescrevendo a equação VI, temos:

$$\text{M}_\text{n} = \text{C}_0 \,.\, (1 + \text{i})^{\text{n}}$$

$$\text{Preço} = VNA_{(data\,da\,compra)} \,.[1 + \left(1 + I_{(meta\,selic)}\right)^{\frac{1}{252}} - 1]^1$$

$$\text{Preço} = VNA_{(data\,da\,compra)} \,.\, \left(1 + I_{(meta\,selic)}\right)^{\frac{1}{252}}$$

7.3.2. Cálculo do Valor do resgate da Letra Financeira do Tesouro (LFT) na data do vencimento

Para calcular o valor de resgate de uma LFT na data de vencimento, é necessário projetar o VNA do dia útil anterior ao vencimento para a data de vencimento pela meta da taxa Selic. Alterando a equação XV, podemos escrever:

$$\text{Preço} = VNA_{(dia\ anterior\ venc.)} \cdot \left(1 + i_{(meta\ selic)}\right)^{\frac{1}{252}}.$$

7.4. NOTAS DO TESOURO NACIONAL (NTN-B PRINCIPAL)

A Nota do Tesouro Nacional – Série B Principal, assim como a Letra Financeira do Tesouro, é um título pós-fixado sem pagamento de cupons de juros, ou seja, o investidor irá receber o montante do investimento uma única vez, no vencimento ou na venda antecipada. A remuneração da Nota do Tesouro Nacional – Série B Principal é indexado ao Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA), como já mencionado anteriormente, é o índice de referência para o Bacen determinar as metas de inflação nacional. Segundo Pereira (2012) a Nota do Tesouro Nacional – Série B Principal (NTN-B Principal) proporciona uma rentabilidade real, pois seu valor é corrigido pela inflação. Entretanto, quem busca um título remunerado por um índice de preço, como o IPCA, acredita que terá uma rentabilidade acima da inflação, dada pela taxa de rentabilidade anual – divulgada juntamente com o preço de compra e reflete o ágio e deságio do título sobre o seu Valor Nominal Atualizado (VNA).

Exemplo 28 – Uma Nota do Tesouro Nacional – Série B Principal com vencimento em 15/05/2027, foi negociada no dia 28 de setembro de 2022 com uma taxa de rentabilidade anual de 4,25%. Calcule a cotação do título na data de liquidação.

Resolução: Entre a data de liquidação e a data de vencimento o prazo é de 1162 dias úteis. Logo, temos:

$$\text{Cotação (\%)} = \frac{100}{(1+i)^{\frac{du}{252}}}$$

$$\text{Cotação (\%)} = \frac{100}{(1+0{,}0425)^{\frac{1162}{252}}}$$

$$\text{Cotação (\%)} = \frac{100}{(1+0{,}0425)^{\frac{1162}{252}}}$$

$$\text{Cotação (\%)} = 82{,}5423$$

O Valor Nominal de uma Nota do Tesouro Nacional – Série B Principal na data base (15/07/2000) é de R$ 1.000,00. O Valor Nominal Atualizado (VNA) de uma NTN-B Principal é igual ao produto do Valor Nominal em 15/07/2000 pela variação do IPCA entre 15/07/2000 e o dia 15 do mês atual. Por exemplo, o VNA para 15/10/2022 é obtido da seguinte forma:

NVA = 1.000 . (1 + $IPCA_{(08/2000)}$) . (1 + $IPCA_{(09/2000)}$) . (1 + $IPCA_{(10/2000)}$) . ... . (1 + $IPCA_{(08/2022)}$) . (1 + $IPCA_{(09/2022)}$)

em que o $IPCA_{(MM/AAAA)}$ é o Índice de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA), divulgado mensalmente pelo IBGE.

O histórico de divulgação dos Valores Nominais Atualizados de uma Nota do Tesouro Nacional – Série B Principal (NTN-B Principal) pode ser obtido, por exemplo, no sítio eletrônico do Tesouro da Fazenda.

Exemplo 29 – Uma Nota do Tesouro Nacional – Série B Principal com vencimento em 15/08/2032, foi negociada no dia 14 de outubro 2022 com uma taxa de rentabilidade anual de 5,42%. Calcule o preço de compra para esse título na data de liquidação.

Resolução: Como a liquidação se deu no dia 15 de outubro de 2022, data da divulgação do Valor Nominal Atualizado (VNA) da Nota do Tesouro Nacional – Série B Principal, obtemos o preço do título pela seguinte formula:

$$\text{Preço} = \text{VNA} \,.\, \text{Cotação} \qquad \textbf{(XV)}$$

Entre a data de liquidação e a data de vencimento o prazo é de 2.472 dias úteis. Logo, a cotação é igual a:

$$\text{Cotação (\%)} = \frac{100}{(1+i)^{\frac{du}{252}}}$$

$$\text{Cotação (\%)} = \frac{100}{(1+0{,}0542)^{\frac{2472}{252}}}$$

$$\text{Cotação (\%)} = 59{,}5848$$

O Valor Nominal Atualizado (VNA) divulgado no dia 15/10/2022 era de 3.947,23. Portanto, o preço de compra da Nota do Tesouro Nacional – Série B Principal, com vencimento em 15 de outubro de 2022, obtido a partir da equação XV, é de:

$$\text{Preço} = \text{VNA} \,.\, \text{Cotação}$$

$$\text{Preço} = 3.947{,}23 \,.\, 0{,}595848$$

$$\text{Preço} = 2.351{,}94$$

7.5. NOTAS DO TESOURO NACIONAL – SERIE B

A Nota do Tesouro Nacional – Série B (NTN-B) possui pagamentos de cupons semestrais de juros, atualmente, a taxa efetiva é de 6% a.a., diferentemente da Nota do Tesouro Nacional – Série B Principal. Porém, o cupom de juros da NTN-B é calculado com base no VNA do título, consequentemente, os valores dos cupons só podem ser determinados no dia do pagamento. Quanto ao sistema de pagamentos, funciona como na NTN-F, ou seja, os cupons de juros são pagos retrospectivamente a cada seis meses, sendo que o último cupom é pago na data de vencimento.

Para se calcular a cotação da NTN-B, é necessário aplicar a seguinte fórmula:

$$\text{Cotação (\%)} = \left[\frac{100\,.\;(1{,}06^{0,5}-1)}{(1+i)^{\frac{du_1}{252}}}\right] + \left[\frac{100\,.\;(1{,}06^{0,5}-1)}{(1+i)^{\frac{du_2}{252}}}\right] + \left[\frac{100\,.\;(1{,}06^{0,5}-1)}{(1+i)^{\frac{du_3}{252}}}\right] + \ldots + \left[\frac{100\,.\;(1{,}06^{0,5}-1)}{(1+i)^{\frac{du_{n-1}}{252}}}\right] + \left[\frac{100\,.\;(1{,}06^{0,5}-1)}{(1+i)^{\frac{du_n}{252}}}\right] + \left[\frac{100}{(1+i)^{\frac{du_n}{252}}}\right] \qquad \textbf{(XVI)}$$

sendo du a quantidade de dias úteis entre a data de liquidação e a data de pagamento do cupom.

De forma semelhante ao da NTN-B Principal, em posse das mesmas fórmulas, podemos efetuar o calculo da VNA, VNA Projetada e do preço da NTN-B, caso determinada a cotação e conhecida a taxa de juros.

Exemplo 30 – No dia 27/09/2022 um investidor comprou uma NTN-B, com o vencimento em 15/05/2025, com uma taxa de juros de 4,36% a.a. O VNA da NTN-B em 15/09/2022 era de 3.956,88. Considere a projeção 0,28% a.m. para o IPCA no período. Calcule o preço pago por esse título, pelo investidor, na data de liquidação.

Resolução: A quantidade de dias úteis entre o último VNA divulgado e a data de liquidação (28/09/2022) é igual a 9 ($du\ liq.$). A quantidade de dias úteis entre 15/09/2022 e o dia 15/10/2022 é de 20 dias ($du\ mês.$). Dado que a projeção do IPCA era de 0,28%, podemos obter o valor do VNA Projetado, temos:

$$VNA_{projetado} = \text{VNA} \,.\, (1\ +\ IPCA_{projetado})^{\frac{du\ liq.}{du\ mês}}$$

$$VNA_{projetado} = 3.956{,}88 \,.\, (1\ +\ 0{,}0028)^{\frac{9}{20}} = 3.961{,}86$$

Dado que o valor da taxa de juros é igual a 4,36% a.a., podemos obter a cotação para esse título na data de liquidação. Sendo assim, faz necessário calcular a quantidade de dias úteis entre a data de liquidação e as datas dos cupons de juros. A partir da data de vencimento do título temos os seguintes vencimentos dos cupons e as quantidades de dias úteis do período a partir da data de liquidação, as informações estão dispostas na tabela 5.

Tabela 5 - Fluxo de pagamento da NTN-B

Parcelas	Datas	Dias úteis
1º cupom	15/05/2023	156
2º cupom	15/11/2023	283
3º cupom	15/05/2024	407
4º cupom	15/11/2024	537
5º cupom	15/05/2025	659
Valor Nominal Atualizado	15/05/2025	659

Fonte: elaborada pelo autor

Utilizando a Equação (XVI), podemos calcular a cotação para o título, temos:

$$\text{Cotação (\%)} = \left[\frac{100\,.\,(1{,}06^{0,5}-1)}{(1+0{,}0028)^{\frac{156}{252}}}\right] + \left[\frac{100\,.\,(1{,}06^{0,5}-1)}{(1+0{,}0028)^{\frac{283}{252}}}\right] + \left[\frac{100\,.\,(1{,}06^{0,5}-1)}{(1+0{,}0028)^{\frac{407}{252}}}\right] + \left[\frac{100\,.\,(1{,}06^{0,5}-1)}{(1+0{,}0028)^{\frac{537}{252}}}\right] + \left[\frac{100\,.\,(1{,}06^{0,5}-1)}{(1+0{,}0028)^{\frac{659}{252}}}\right] + \left[\frac{100}{(1+0{,}0028)^{\frac{659}{252}}}\right]$$

Cotação (%) = 113,9846

Enfim, com esses resultados, podemos encontrar o preço da NTN-B multiplicando o VNA Projetado pela cotação, temos:

$$\text{Preço} = VNA_{projetado}\ .\ \text{Cotação}$$

$$\text{Preço} = 3.96186\ .\ 1{,}139846$$

$$\text{Preço} = 4.515{,}91$$

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Essa matemática financeira aprimorada não deve ser, de forma alguma, limitada a um grupo de pessoas envolvidas com a área administrativo-financeira. E sim, um conhecimento que deve ser difundido a sociedade. Essas informações devem ser apresentadas as pessoas e a escola possui esse papel necessário, de instruir as pessoas e apresentar-lhes caminhos, de forma que, possam ser capazes de tomar suas próprias decisões e gerenciar, nessa situação, suas finanças.

A curiosidade sobre o mundo de investimentos financeiros e o alto índice de uso da caderneta de poupança, apontado em pesquisas, fomentou a elaboração deste trabalho por notar a possibilidade de divulgar informações sobre outros investimentos de baixo risco e que apresentam uma rentabilidade maior. Visto que, é possível uma pessoa aproveitar melhor seu dinheiro, caso souber investi-lo de maneira adequada.

No presente trabalho, não foram abordados todos os tipos de investimentos, alguns deles também populares como os Certificados de Depósitos Bancários (CDB), ações, Fundos Imobiliários, entre outros. Não era pretensão mostrar qual é o melhor investimento pois essa analise depende do perfil de cada pessoa, esse perfil pode variar entre conservador, moderado e arrojado – está diretamente associado à disposição do investidor a assumir riscos no investimento.

A importância da educação financeira está diretamente ligada a formação de uma sociedade consciente quanto a utilização do dinheiro e em desenvolver habilidades financeira adequadas para se estabilizarem, obtendo assim a independência financeira desejada. Kioyosaki (2000, p. 81):

> Como os estudantes deixam a escola sem habilidades financeiras, milhões de pessoas instruídas obtêm sucesso em suas profissões, mas depois se deparam com dificuldades financeiras. Trabalham muito, mas não progridem. O que falta em sua educação não é saber como ganhar dinheiro, mas sim como gastá-lo (...). Essas pessoas muitas vezes trabalham mais do que seria necessário porque aprenderam a trabalhar arduamente, mas não como fazer o dinheiro trabalhar para elas.

O objetivo desse trabalho era abordar e expor um pouco da matemática que está por trás desses produtos vendidos por instituições financeiras, de modo que possa contribuir com o desenvolvimento de cidadãos educados financeiramente. Além disso, que o material possa servir como um caminho alternativo para os professores, ao estabelecer, em suas aulas, a aplicação da matemática financeira ao cotidiano do aluno. É de conhecimento a dificuldade do professor ao planejar aulas que objetivam uma determinada aplicação da matemática, já que exige uma dedicação maior do profissional em busca de novos conhecimentos, nesse caso, por exemplo, conhecimentos voltados ao mercado financeiro. Todavia, estabelecer relação entre a teoria e a realidade torna o ensino mais atrativo e prazeroso.

Espero, portanto, que os assuntos aqui expostos consigam despertar interesses, além de conscientizar as pessoas quanto a importância da educação financeira e, ainda, que o material aqui apresentado, possa servir como base para a construção de novos conhecimentos.

REFERÊNCIAS

AMAZON.COM. Notebook. Disponível em: https://www.amazon.com.br/Notebook-Ultra-ProcessadorMicrosoftPersonal/dp/B09KNZX9C6/ref=sr_1_1?__3Aamzn1.fos.25548f35-0de7-44b3-b28e-0f56f3f96147. Acesso em 14 julho de 2022

BANCO CENTRAL DO BRASIL, Taxa Selic. Disponível em: https://www.bcb.gov.br/controleinflacao/taxaselic. Acesso em: 10 setembro 2022.

BANCO CENTRAL DO BRASIL. FAQ – fundo garantidor de crédito (FGC). 2014. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l8177.htm. Acesso em: 01 de outubro de 2022.

BRASIL. *Decreto nº 12.703, de 7 de agosto de 2012. Altera art. 12 da Lei nº 8.177, de 1 de março de 1991, que estabelece regras para a desindexação da economia e da outras providências*. Brasília, DF, 2012. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2011-2014/2012/Lei/L12703.htm#art1. Acesso em: 1 de outubro de 2022

BRASIL. *Decreto nº 6.306, de 14 de dezembro de 2012. Regulamenta o Imposto sobre Operações de Créditos, Câmbio e Seguro, ou relativas a Títulos ou Valores Mobiliários - IOF*. Brasília, DF, 2012. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2011-2014/2012/Lei/L12703.htm#art1. Acesso em: 1 de outubro de 2022

CAMPOS, Marcelo Bergamini. **A educação financeira na matemática do Ensino Fundamental**. 2012. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora/MG, 2012. Disponível em: https://www2.ufjf.br/mestradoedumat//files/2011/05/Disserta%c3%a7%c3%a3o-_-Marcelo-Bergamini-Campos.pdf. Acesso em: 08 setembro 2022.

CERBASSI, G. *Casais inteligentes enriquecem juntos*. São Paulo: Gente, 2004.

CAMARGO, C. *Planejamento financeiro pessoal e decisões financeiras organizacionais: relações e implicações sobre o desempenho organizacional no varejo.* Curitiba, 2007. Centro de Pesquisa e Pós-Graduação em Administração, Universidade Federal do Paraná, 2007.

CONSELHO MONETÁRIO NACIONAL. *Resolução nº 3.354, de 31 de março de 2006. Altera e consolida as normas relativas à metodologia de cálculo da Taxa Básica Financeira – TBF e Taxa Referencial – TR.* Brasília, DF, 2006. Disponível em: https://www.bcb.gov.br/pre/normativos/res/2006/pdf/res_3354_v4_P.pdf. Acesso em: 01 de outubro de 2022.

CAMARGOS, M. A. d. *Matemática Financeira: aplicada a produtos financeiros e análise de investimentos.* São Paulo: Saraiva, 2013.

IEZZI, G. et al. Progressões. *Matemática: ciências e aplicações*. 2. ed. São Paulo: Atual, 2004. v. 1, cap. 9, p. 263-303.

KIOYOSAKI, Robert T.; Lechter, S. L. *Pai Rico, pai pobre: O que os ricos ensinam a seus filhos sobre dinheiro.* Ed. 66º, Rio de Janeiro: Elsevier, 2000.

LIMA, E. L. et al. Progressões. *A matemática do ensino médio*. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v. 2, cap. 1, p. 1-43.

LUZIO, N. W. *Um Pouco de História da Poupança na Caixa Econômica Federal*. Disponível em:http://downloads.caixa.gov.br/_arquivos/poupanca/historia_da_poupanca/HISTPOUP.pdf. Acesso em: 30 de setembro de 2022.

SECURATO, J. R. *Cálculo financeiro das tesourarias: bancos e empresas*. 4. ed. São Paulo: Saint-Paul Editora, 2008.

SOBRINHO, J. D. V. *Matemática Financeira*. 7. ed. São Paulo: Atlas. 2013.

STEPHANI, Marcos. *Educação Financeira: uma perspectiva interdisciplinar na construção da autonomia do aluno.* Dissertação (Mestrado). Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul. Porto Alegre-RS: PUCRS, 2005.

TESOURO DIRETO. Conheça o tesouro direto. Tesouro Direto. [s.l]: Tesouro Nacional, 2017. Disponível em:

https://www.tesourodireto.com.br/data/files/1B/A1/EF/35/855FB610FAC28EB6018E28A8/Modulo1_TesouroDireto%20_2017_.pdf. Acesso em: 30 de setembro 2022.