UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA/GRADUAÇÃO
UNIDADE UNIVERSITÁRIA DE NOVA ANDRADINA

Da Profissão para a Graduação: Teorema de Pitágoras na Construção de Telhados

Nova Andradina - 2021

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA/GRADUAÇÃO
UNIDADE UNIVERSITÁRIA DE NOVA ANDRADINA

Da Profissão para a Graduação: Teorema de Pitágoras na Construção de Telhados

Márcio de Sousa da Paz
Graduação em Matemática: Licenciatura

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura Plena em Matemática/UEMS - da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, como requisito parcial para obtenção do título de Graduado em Matemática.
Orientador: Sonner Arfux de Figueiredo

Nova Andradina - 2021

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. SONNER ARFUX DE FIGUEIREDO
UEMS - Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul

Prof. Msc. RONAN FERNANDES DE ARRUDA
ANAEC - Associação Novaandradinensse de Educação e Cultura

Prof. Especialista VITOR DE SOUZA LICHOTI
UNIGRAN/FAD - Universidade da Grande Dourados

Nova Andradina - 2021

Da Paz, Márcio de Souza
(Da Profissão para a Graduação: Teorema de Pitágoras na Construção de Telhados)

Orientador: Prof. Dr. Sonner Arfux de Figueiredo

Trabalho de Conclusão de Cursoa Universidade Estadual
de Mato Grosso do Sul, Programa de Graduação
em Licenciatura Plena em Matemática, Nova Andradina, 2021.

1. PITAGORAS
2. ANGULOS NOTAVEIS
3. APLICAÇÃO EM TELHADOS

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo autor.

RESUMO

Este trabalho de conclusao de curso tem a finalidade de pesquisar o desempenho entre a teoria e a pratica no ensino da teoria de Pitagoras em sala de aula. Mais especificamente na explicação da geometria na construção de telhados. Tentando de maneira simples como expor teorias que certamente estão presentes na aprendizagem matemática de muitos profissionais que utilizam de conceitos e definições geométricas muitas vezes sem saber das formalidades de axiomas, teoremas e propriedades que as compõem mas que estas facilitam o aprendizado desse conteúdo.

Observando o cotidiano escolar buscando verificar como os alunos podem ter tanta dificuldade na assimilação da teoria com a pratica no uso da geometria euclidiana. Mais especificamente no uso da teoria de Pitagoras.

Palavra-chave: Teoria de Pitágoras, Construção de Telhados e Ensino da Geometria

ABSTRACT

This course conclusion work has the purpose of researching the performance between theory and practice in teaching the theory of Pythagoras in the classroom. More specifically in the explanation of geometry in roof construction. Trying in a simple way how to expose theories that are certainly present in the mathematical learning of many professionals who use geometric concepts and definitions often without knowing the formalities of axioms, theorems and properties that compose them but that these facilitate the learning of this content.

Observing the school routine, seeking to verify how students can have so much difficulty in assimilating theory with practice in the use of Euclidean geometry. More specifically in the use of the Pythagorean theory.

KEYWORD: Pythagoras Theory, Roof Construction and Geometry Teaching

AGRADECIMENTOS

Primeiramente quero agradecer a Deus, que sempre me acolheu em seus braços e me deu bençãos durante esta caminhada.

Aos Professores Ronan e Anderson pelo incentivo de sempre nas aulas, e amizade que levamos para fora da Universidade

Ao meu orientador professor Dr. Sonner, pela dedicação, apoio e orientação.

Aos meus pais, Paulo e Suely, que nunca mediram esforços para me ensinar o caminho do bem, e sempre me apoiaram em todas as etapas da minha vida. Sem vocês, eu não chegaria até aqui. Muito obrigado por tudo.

Aos amigos e colegas de profissão pelo apoio incondicional, ao amigo/colega de profissão Vitor de Souza Lichoti. A todos os professores envolvidos com a graduação de Matemática na unidade de Nova Andradina.

Conteúdo

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Baseando-se no que o trabalho propõe, que é a explicação da geometria na construção de telhados, é válido expor teorias que certamente estão presentes na aprendizagem matemática de muitos profissionais que utilizam de conceitos e definições geométricas muitas vezes sem saber das formalidades de axiomas, teoremas e propriedades que as compõem mas que estas facilitam o aprendizado desse conteúdo. Em seguida será destacado uma metodologia para a proposta da utilização da mesma em aulas baseadas na construção e geometria de telhados.

No cotidiano escolar com as reflexões, verifica-se a dificuldade do ensino e do aprendizado da geometria nas unidades escolares públicas.

As reflexões partiu-se à busca de subsídios que respaldassem a proposta do ensino da Geometria Plana ser realizado não apenas de forma abstrata e algébrica, mas também, de forma concreta e geométrica.

Basendo-se no Egito, temos o Euclides e Descartes fazendo a algebrização da geometria, relata-se o surgimento da Geometria Plana como ferramenta para soluções de problemas práticos no dia a dia, seu surgimento como ciência na Grécia e sua abordagem puramente lógico-geométrica e por fim sua algebrização sofrida por René Descartes. No Brasil, a geometria e as construções geométricas como foco em Pitágoras faz-se um levantamento do surgimento e evolução da Geometria Plana como disciplina no Brasil e o surgimento e desuso das Construções Geométricas como disciplina no Brasil.

O trabalho aborda tambem a abordagem do conhecido significativo atraves da Teoria de Ausubel, onde as ideias irão se convergindo para um melhor ensino na educacao basica. Resalta-se tambem a importancia da teoria do Teorema de Pitágoras e suas demonstracoes, ou seja, de maneira simples, a crianca podera entender a teoria e suas aplicações.

O resultado deste trabalho é observado nas considerações finais, onde pode-se observar a importancia do conhecimento matematico na profissao da carpintaria.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 Objetivo Geral

Analisar os dados do Teorema de Pitágoras e os Ângulos Notáveis na aplicação das construções de telhados

1.1.2 Objetivos Especificos

A fim de atingir o objetivo geral definido, os seguintes objetivos específicos foram alcançados:

. Mostrar os principais resultados da educação basica no ensino da geometria plana.

. Mostrar a importancia do conhecimento significativo.

. A utilizacao da Teoria da Matematica pura no cotidiano dos trabalhadores que usam da geometria plana.

. Demonstrar o uso do Teorema de Pitagoras na construção de telhados.

Capítulo 2

A MATEMÁTICA NO EGITO

2.1 Egito, Euclides e a algebrização da geometria.

Este capítulo tem como proposta contar um pouco a historia do Egito e a Geometria Empírica. A urgente necessidade de se demarcar terras, a fim de se estabelecer limites de propriedades em civilizações antigas, bem como no Egito Antigo, estimulou o desenvolvimento de uma importantíssima ciência chamada Geometria. O nome Geometria deriva do grego -geometrien, donde geo significa terra e metrien significa medida. No século V a.C. um geógrafo e historiador grego de nome Heródoto , conhecido como -o pai da história, seria o primeiro a registrar o possível surgimento da geometria

> CIX - Disseram-me ainda os sacerdotes que Sesóstris realizou a partilha das terras, concedendo a cada Egípcio uma porção igual, com a condição de lhe ser pago todos os anos certo tributo. Se o rio carregava alguma parte do lote de alguém, o prejudicado ia procurar o rei e expor-lhe o acontecido. O soberano enviava agrimensores ao local para determinar a redução sofrida pelo lote, passando o dono a pagar um tributo proporcional à porção restante. Eis, segundo me parece, a origem da geometria, que teria passado desse país para a Grécia.? (HERÓDOTO, 2001, p.251)

Valendo-se da experimentação e da observação a civilização egípcia desenvolveu resultados geométricos baseados em um método indutivo, ou seja, surge com os egípcios uma -Geometria Empírica em que a experiência sensorial e despreocupada com a demonstração formal, comum a matemática moderna, se faz presente. Esses conhecimentos geométricos utilizados pelos povos da antiguidade, como os povos egípcio e babilônio, datam, aproximadamente, de 4000 a.C.

Era uma Geometria desenvolvida apenas para atender as necessidades econômico-sociais. O tratamento da Geometria como uma ciência baseada em uma estrutura lógica e portanto organizada deve-se aos gregos, que o fizeram, inicialmente, por volta de V a.C.

São os gregos, que enxergam a Geometria por um novo prisma não mais baseado no modelo indutivo, mas sim num modelo de caráter dedutivo.

2.2 Euclides e a Geometria Dedutiva

No século III a.C. a Geometria já era bem conhecida de muitas sociedades e povos. Os egípcios, os árabes, os babilônios, os gregos, dentre vários outros já conheciam a Geometria devido à enorme necessidade de medição. Nessa mesma época, um filósofo e matemático grego realizou um ato espantoso, reunir em um tratado, de nome Elementos, uma obra de 13 volumes, todo o conhecimento de Matemática da época. A título de ciência, talvez os Elementos seja o livro de maior influência do mundo ocidental moderno.

Uma tarefa dessa magnitude exigia destreza matemática, mas acima de tudo -organização. Sua -organização foi tamanha, que pode-se dizer, que esse matemático foi o inventor do método axiomático (procedimento que se inicia na aceitação intuitiva de algumas verdades, os postulados, ou axiomas, e que tem seu desenrolar através de uma condução lógica dos mesmos). Foi pela busca de uma organização puramente embasada numa lógica retilínea, que esse geômetra, chamado Euclides, ditou definições, axiomas e postulados.

Essas normas totalizam 35 definições, 3 postulados e 12 axiomas, porém ao longo do tempo convencionou-se os postulados como 5, os três primeiros postulados acrescidos de outros dois, que são os axiomas 11 e 12. São tais os postulados:

1 Pede-se, como coisa possível, que se tire de um ponto qualquer para outro qualquer ponto uma linha reta.

2 E que uma linha reta determinada se continue em direitura de si mesma, até onde seja necessário.

3 E que com qualquer centro e qualquer intervalo se descreva um círculo.

4 Todos os ângulos retos são iguais.

5 E se uma linha reta, encontrando-se com outras duas retas, fizer os ângulos internos da mesma parte menores que dois retos, estas duas retas produzidas ao infinito concorrerão para a mesma parte dos ditos ângulos internos.

Sendo esses 4º e 5º postulados, justamente, os axiomas 11 e 12 dos ditos de Euclides.

Tradicionalmente, chamam-se as construções com régua e compasso de construções euclideanas, sendo que:

> Euclides não usa a palavra compasso em seus Elementos e nunca descreve como as construções devem ser feitas. A restrição de que essas construções devem ser realizadas apenas com o uso de uma régua sem escalas e um compasso tem tradicionalmente sido atribuída a Platão (390 a.C.)?. (EVES, 1992, p.29).

São os três primeiros postulados que definem como as construções podem ser realizadas. A régua, sem escalas, surge dos dois primeiros postulados, que são reescritos aqui numa linguagem mais acessível:

1 Pode-se traçar uma reta por dois pontos quaisquer;

2 Pode-se prolongar uma reta limitada continuamente segundo uma reta.

Já o compasso surge do terceiro postulado:

3 Pode-se construir um círculo dado o centro e um segmento (o raio).

Deve-se atentar para o fato de que a Geometria de Euclides é estritamente baseada em Construções Geométricas e todas as demonstrações encontradas nos -Elementos são desprovidas de valores numéricos. Nesse momento histórico, na qual a Geometria se encontrava, Geometria e Construções Geométricas eram indissociáveis, ou seja, os métodos de solução tanto de problemas práticos como de teoremas e problemas em geral não recorriam à Álgebra para serem solucionados.

As armas disponíveis não passavam de algumas definições, postulados e axiomas.

Claramente, a Geometria Plana ensinada no ensino fundamental difere da Geometria de Euclides, pois recorre-se à Aritmética e à Álgebra para a solução de praticamente todos os problemas e teoremas.

O fato de que a Geometria ensinada atualmente difere radicalmente da Geometria de Euclides está clara no uso dos números, o que não era feito pelos gregos. O método desenvolvido por Euclides foi um refinamento baseado numa lógica retilínea já utilizada pelos gregos, porém sem preocupação de se -amarrar? as ideias, a ponto de não se cometer afirmações por demais gerais, levianas ou até mesmo inverdades ao não se valer do rigor necessário. Nesse instante que se fez presente a motivação em se criar regras, premissas e pontos de partida que estruturassem a Geometria não apenas como um conjunto de resultados, mas sim como uma ciência. Essa preocupação de Euclides o levou a desenvolver um método científico utilizado até hoje, o método axiomático baseado totalmente em deduções lógicas.

O declínio do império Grego, a partir do séc. III a. C. e a transmissão esparsa e parcial através dos povos posteriores de sua cultura e descobertas matemáticas relegou o estudo da Geometria à forma isolada e pouco importante.

Capítulo 3

FUNDAMENTAÇÃO TEORICA

A Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel é aquela que - resumidamente - diz que essa aprendizagem ocorre quando o indivíduo, a partir de conceitos mais gerais parte para um conceito mais específico; como se o cognitivo buscasse em suas memórias uma ideia ou experiência ancorada para facilitar a aprendizagem de uma nova informação.

Dentre os três tipos de aprendizagem: cognitiva, afetiva e psicomotora; a teoria de Ausubel têm o seu foco na aprendizagem cognitiva, pois, para estudar os processos que ocorrem antes/durante/depois, é necessário entender esse tipo de aprendizagem responsável pelo armazenamento e organização das informações que chegam até o indivíduo.

Assim como outros teóricos do cognitivismo, Ausubel também baseia sua teoria na qual o indivíduo possui uma "estrutura cognitiva, entendida como o conteúdo total de ideias de um certo indivíduo e sua organização; ou, o conteúdo e organização de suas ideias em uma área particular de conhecimentos" Moreira (2014, p. 152), e que a aprendizagem significa a organização e integração do material/conteúdo nessa estrutura cognitiva.

A ideia central, ou fator que mais influencia tal aprendizagem para Ausubel, está em relacionar aquilo que o aluno traz em sua bagagem com uma nova informação. Novas ideias e informações menos inclusivas são aprendidas, na medida em que as mais inclusivas estejam disponíveis de forma clara na estrutura cognitiva do indivíduo, funcionando como "ponto de ancoragem às novas ideias e conceitos" Moreira (2014, p,152).

Nesse momento tem-se o seguinte questionamento: Mas e quando o indivíduo não tem ideias e informações prévias para se ancorar?

> "...a experiência cognitiva não se restringe à influência direta dos conceitos já aprendidos, sobre componentes da nova aprendizagem, mas abrange também modificações relevantes nos atributos da estrutura cognitiva pela influência do novo material. Há, pois, um processo de interação, por meio do qual conceitos mais relevantes e inclusivos interagem com o novo material, funcionando como ancoradouro, isto é, abrangendo e integrando esse material e, ao mesmo tempo, modificando-se em função dessa ancoragem". (MOREIRA, 2014, p. 152)

Portanto, o indivíduo, pode buscar através da interação com esse novo material novas ideias e informações mais inclusivas, que posteriormente irão possibilitar a ancoragem de outros conceitos menos inclusivos.

Esse trabalho tratará de mostrar como experiências profissionais de um construtor de telhados podem facilitar na aprendizagem de geometria, usando as lentes da teoria ausubeliana, e para essa análise, será explicado nos próximos tópicos cada ponto - de maneira sucinta - da aprendizagem significativa, desde a base onde a teoria se fundamenta, até os processos, organizações e tipos de aprendizagem que levam o indivíduo aprender significativamente algo. Após feito o levantamento e entendimento dessa teoria, será colocado para análise um orçamento de construção de um telhado e com essa ótica ausubeliana, dizer se tal experiência anterior foi ou não potencialmente significativa para a aprendizagem matemática. Usaremos como base, as condições para a ocorrência da aprendizagem significativa destacadas por Moreira (2014, p.156):

a - O material a ser aprendido deverá ser relacionável à estrutura cognitiva do aprendiz, de maneira não-arbitrária e não literal;

b - O aluno ou aprendiz, deve manifestar uma disposição para relacionar de maneira substantiva e não-arbitrária o novo material à sua estrutura cognitiva;

Os resultados estarão contidos nas considerações finais deste capítulo.

3.1 Aprendizagem Significativa

Falando-se em aprendizagem significativa de Ausubel, é impossível deixar de destacar uma palavra que define um dos processos pelo qual essa aprendizagem ocorre, que é o subsunçor. Define-se que:

> "aprendizagem significativa é o processo por meio do qual uma nova informação relaciona-se com um aspecto específico e relevante já presente na estrutura de conhecimento do indivíduo, ou seja, este processo envolve a interação da nova informação com uma estrutura de conhecimento específica"(MOREIRA, 2014, p. 153)

Essa estrutura de conhecimento específica é o que Ausubel define como subsunçor, portanto, quando essa aprendizagem ocorre, diz-se que a nova informação se ancorou em um subsunçor e foi armazenada.

O armazenamento de informações funciona de forma hierárquica, conceitos mais gerais e mais inclusivos se encontram no topo dessa hierarquia, e é a partir desses, que elementos mais específicos (cada vez menos inclusivos) vão se estabelecendo numa interação com os subsunçores durante todo o processo de aprendizagem.

Para Ausubel, a aprendizagem mecânica está relacionada com a "memorização"de novas informações, tendo pouca ou nenhuma interação com conceitos já existentes na estrutura cognitiva, esse armazenamento é feito de forma arbitrária, não fazendo nenhuma ligação a conceitos subsunçores específicos. Entretanto, para Ausubel, esse meio de aprendizagem se faz necessário quando o indivíduo recebe informações em uma área de ensino completamente nova, pois em sua estrutura cognitiva não existem ideias prévias onde ele possa ancorar e assimilar as novas informações. Nesse caso, a aprendizagem mecânica ocorrerá "até que alguns elementos de conhecimento, relevantes a novas informações na mesma área, existam na estrutura cognitiva e possam servir de subsunçores, ainda que pouco elaborados"(MOREIRA, 2014, p. 155). E conforme a aprendizagem fica mais significativa, esses subsunçores ficam cada vez mais elaborados e potencialmente aptos para que ocorra a ancoragem de novas informações.

E como saber se houve ou não aprendizagem significativa?

Segundo Ausubel, a compreensão verdadeira de um conceito resulta na obtenção de "significados claros, precisos, diferenciados e transferíveis". Ou seja, o indivíduo que aprende significativamente está com a estrutura apta a fazer transformações do que ele já sabe para a resolução de algo que lhe é imposto mesmo que de forma diferente. Assim, para saber se houve tal aprendizagem, é "formular questões e problemas de uma maneira nova e não familiar, que requeira máxima transformação do conhecimento adquirido", fraseando este problema de forma diferente, apresentando-o num contexto distinto daquele encontrado originalmente.

3.2 Tipos de Aprendizagem Significativa: Representacional, de Conceitos e Proposicional

A aprendizagem representacional é a atribuição literal de significados a determinados símbolos, identificando-os a objetos, eventos e conceitos, que são seus referentes.

A aprendizagem de conceitos é mais genérica e categórica. A diferença entre a representacional e a de conceitos é que a primeira relaciona-se diretamente com o que se representa, por exemplo: a palavra "cadeira", que é relacionada a um objeto "cadeira", sem diferenciar tipos de cadeira. A de conceitos faz uma atribuição de características mais essenciais do objeto que o diferencia dos demais, colocando-o em uma categoria ou gênero, por exemplo: a cadeira de madeira.

Na proposicional diferencia-se das duas anteriores, pois aqui não se representa ou se aprende o significado de conceitos, mas sim "aprender o significado que está além da soma dos significados das palavras ou conceitos que compõem a proposição". As ideias aqui são expressas por meio de proposições.

3.3 Processo de aquisição e organização de significados

Ausubel propõe a teoria da assimilação para se adquirir e organizar significados na estrutura cognitiva, é o que Moreira (2014, p. 157) representa em um esquema o valor explanatório que ela tem para a aprendizagem e retenção de uma nova informação, da seguinte maneira: uma nova informação relaciona-se e assimila-se com um conceito subsunçor existente na estrutura cognitiva, em que o produto interacional subsunçor-nova informação, resulta em um subsunçor modificado.

Assim é dado o processo de assimilação entre um conceito potencialmente significativo (nova informação) a uma ideia mais geral, mais inclusiva (o subsunçor). Essa assimilação também foi chamada anteriormente nesse artigo de ancoragem. Para Ausubel essa assimilação tem efeito facilitador na retenção.

Durante um período variável de tempo, a nova informação e o subsunçor ficam separadas individualmente como entidades, o que favorece a retenção dessa nova informação, apesar de ainda estar sujeita a uma tendência de redução da organização cognitiva, pois "é mais simples e econômico reter apenas as ideias, conceitos e proposições mais gerais e estáveis do que as novas ideias assimiladas"Moreira (2014, p. 158).

E após a aprendizagem significativa, inicia-se um novo estágio da assimilação, que é a assimilação obliteradora. Nesse estágio as novas informações tornam-se progressivamente menos separáveis de seus subsunçores, e que anteriormente eram "dissociáveis como entidades", agora reduz-se simplesmente, no produto dessa interação, em um subsunçor modificado. O grau de assimilação varia em cada caso, e dependerá da relevância que o subsunçor terá nesse processo.

3.4 Processos de Aprendizagem Significativa: Subordinada, Superordenada e Combinatória

O processo até agora abordado foi o da aprendizagem subordinada, onde é estabelecida uma relação de subordinação entre o novo material e a estrutura cognitiva preexistente: a nova informação adquire significado a partir da interação com um subsunçor.

A aprendizagem superordenada é quando se obtém um conceito ou proposição potencialmente significativo, mais geral e inclusivo sobre um determinado assunto, partindo de ideias ou conceitos mais específicos e menos inclusivos.

A combinatória é uma aprendizagem que está além as citadas anteriormente, não guarda a relação entre a subordinada e superordenada, a aprendizagem combinatória está relacionada com um conteúdo mais amplo, relevante e único na estrutura cognitiva, isto é, essa nova proposição não pode ser assimilada por outras, "é como se a nova informação fosse potencialmente significativa por ser relacionável à estrutura cognitiva como um todo, de uma maneira bem geral e não com aspectos específicos dessa estrutura" Moreira (2014, p. 159), situações essas que são vistas nos dois primeiros processos de aprendizagem significativa: a subordinada e a superordenada.

Capítulo 4

TEORIA DOS ÂNGULOS NOTÁVEIS

Chama-se ângulo à reuniao de duas semi-retas de mesma origem, não contidas numa mesma reta.

4.1 Ângulo Reto, Agudo e Obtuso

- Ângulo reto é todo ângulo congruente a seu suplementar adjacente.
- Ângulo Agudo é um ângulo menor que o ângulo reto.

4.2 Triângulos Retangulos - Relações Metricas

Considerando um triângulo ABC, retângulo em A, e conduzindo $\overline{AD}$ perpendicular a $\overline{BC}$, com D em $\overline{BC}$, a caracterização dos elementos se dará:

- $\overline{BC} = a : Hipotenusa$;
- $\overline{AC} = b : cateto$;
- $\overline{AB} = c : cateto$;
- $\overline{BD} = m$: projeção do cateto c sobre a hipotenusa;
- $\overline{CD} = n :$ projeção do cateto b sobre a hipotenusa;
- $\overline{AD} = h :$ altura relativa à hipotenusa.

4.2.1 Semelhanças

Conduzindo a altura $\overline{AD}$ relativa a hipotenusa de um triângulo retângulo ABC, obtemos dois triângulos retângulos DBA e DAC semelhantes ao triângulo ABC.

De fato, devido a congruência dos ângulos indicados na figura acima,

$$\hat{B} \equiv \hat{1} (complementos\ de\ \hat{C})$$

e

$$\hat{C} \equiv \hat{2} (complementos\ de\ \hat{B})$$

temos:

$$\Delta ABC \sim \Delta DBA$$

$$\Delta ABC \sim \Delta DAC$$

$$\Delta DBA \sim \Delta DAC$$

pois eles têm dois ângulos congruentes.
logo:

$$\Delta ABC \sim \Delta DBA \sim \Delta DAC$$

Com base nas semelhanças dos triangulos no item anterior e com os elementos caracterizados, disto temos que:

$$\Delta ABC \sim \Delta DBA \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{c} = \frac{b}{h} \Rightarrow bc = ah \\ \frac{a}{c} = \frac{c}{m} \Rightarrow c^2 = am \\ \frac{b}{h} = \frac{c}{m} \Rightarrow ch = bm \end{cases}$$

$$\Delta ABC \sim \Delta DAC \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{b}{n} \Rightarrow b^2 = an \\ \frac{a}{b} = \frac{c}{h} \Rightarrow bc = ah \\ \frac{b}{n} = \frac{c}{h} \Rightarrow bh = cn \end{cases}$$

$$\Delta DBA \sim \Delta DAC \Rightarrow \begin{cases} \frac{c}{b} = \frac{h}{n} \Rightarrow bh = cn \\ \frac{c}{b} = \frac{m}{h} \Rightarrow ch = bm \\ \frac{h}{n} = \frac{m}{h} \Rightarrow h^2 = mn \end{cases}$$

Resumindo as relações encontradas, excluindo as repetidas, temos:

1. $b^2 = an$

2. $c^2 = am$

3. $h^2 = mn$

4. $bc = ah$

5. $bh = cn$

6. $ch = bm$

Em qualquer triângulo retângulo:

1. - cada cateto é media proporcional(ou media geometrica) entre sua projeção sobre a hipotenusa e a hipotenusa.
$$b^2 = an$$
e
$$c^2 = am$$

2. - a altura relativa à hipotenusa é média proporcional(ou media geométrica) entre os segmentos que determina sobre a hipotenusa.
$$h^2 = mn$$

3. - o produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura relativa a ela.
$$bc = ah$$

4. - o produto de um cateto pela altura relativa à hipotenusa é igual ao produto do outro cateto pela projeção do primeiro sobre a hipotenusa.
$$bh = cn$$
e
$$ch = bm$$

4.2.2 Teorema de Pitágoras

A soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

$$b^2 + c^2 = a^2$$

Demonstração:
Para provar esta relação basta somar membro a membro (1) e (2), como segue:

$$b^2 = an$$
$$c^2 = am$$
$$\Rightarrow b^2 + c^2 = am + an \Rightarrow b^2 + c^2 = a(m+n) \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2$$

As três primeiras relações metricas:

1. $b^2 = an$

2. $c^2 = am$

3. $h^2 = mn$

são as mais importantes.

Delas decorrem todas as outras. Por exemplo, fazendo (1) x (2) membro a membro e usando a (3), temos:

$b^2c^2 = anam \Rightarrow b^2c^2 = a^2mn \Rightarrow b^2c^2 = a^2h^2 \Rightarrow bc = ah.$

Num triangulo retangulo, a soma dos inversos dos quadrados dos catetos é igual ao inverso do quadrado da altura relativa à hipotenusa.

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}$$

de fato:

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{c^2 + b^2}{b^2c^2} = \frac{a^2}{b^2c^2} = \frac{a^2}{a^2h^2} = \frac{1}{h^2}$$

4.3 Aplicaçoes do Teorema de Pitágoras

4.3.1 A Diagonal do Quadrado

Dado um quadrado de lado a, calcular sua diagonal d.

Sendo $ABCD$ o quadrado de lado a, aplicando o teorema de Pitagoras no $\triangle ABC, temos:$

$$d^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow d^2 = 2a^2 \Rightarrow d = a\sqrt{2}$$

4.3.2 A Altura do Triângulo Equilatero

Dado um triângulo equilatero de lado a, calcular sua altura h.

Sendo ABC um triângulo equilatero de lado a, M o ponto medio de $\overline{BC}$, calculamos $\overline{AM} = h$ aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle AMC$, obtemos:

$$h^2 + (\frac{a}{2})^2 = a^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \Rightarrow h^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

4.3.3 Seno, Cosseno e Tangente de 30°, 45° e 60°

Sendo α a medida de um dos ângulos agudos de um triângulo retangulo, pondo-se:

Seno de $\alpha = sen\alpha = \frac{catetooposto}{hipotenusa} = \frac{b}{a}, sen\alpha = \frac{b}{a}$

Cosseno de $\alpha = cos\alpha = \frac{catetoadjacente}{hipotenusa} = \frac{c}{a}, cos\alpha = \frac{c}{a}$

Tangente de $\alpha = tg\alpha = \frac{catetooposto}{catetoadjacente} = \frac{b}{c}, tg\alpha = \frac{b}{c}$

e usando os resultados anteriores, temos:

$$sen45^{o} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$cos45^{o} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg45^{o} = \frac{a}{a} = 1$$

e tambem:

$$sen60^{o} = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos60^{o} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$tg60^{o} = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

sendo que podemos utilizar dos resultados:

$$sen30^{o} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$cos30^{\mathrm{o}} = a\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg30^{\mathrm{o}} = \frac{\frac{a}{2}}{a\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Capítulo 5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O exemplo que daremos para elucidar a ideia da teoria de aprendizagem significativa é a de um profissional que trabalha com a construção de telhados, que ingressou na faculdade de matemática x anos após a conclusão do ensino médio, e colocar aqui quais conceitos ele utilizou em sua profissão que possivelmente foram facilitadores em sua jornada acadêmica.

A construção de telhados, assim como a de uma casa, por exemplo, é composta desde a parte do projeto do modelo - parte de desenho e estruturas - até o seu custo e execução. Em todas essas etapas existe a matemática desde etapas mais formais até em suas formas subjetiva e técnica, assim, o projeto e desenho que um arquiteto e engenheiro realizam, passa por aquele que executará a construção do telhado.

Entretanto, para orçar um telhado é necessário que o profissional analise a planta baixa, e a partir das medidas de área de cada cômodo calcule quanto material será gasto. Dessa forma, elementos da geometria plana começam a ser utilizados: perímetro, área, polígonos, simetria e o principal, a porcentagem que define a inclinação do telhado. Para tanto será demonstrado abaixo como é feito um orçamento de um telhado, em seguida será justificado onde cada etapa dessa elaboração corresponde a um subsunçor de Ausubel que foi um facilitador na aprendizagem da geometria vista na graduação.

O primeiro passo a se fazer é transferir a planta baixa do projeto para um caderno de desenho milimetrado, onde é feito um escalonamento para a realização do mesmo, sendo na escala de 1:100. A imagem abaixo é da planta baixa exemplo, que utilizaremos para orçamentar, começando com as medidas totais do perímetro externo da obra, dessa forma teremos uma vista superior do corpo do projeto a ser executado, o telhado.

Dessa planta - que está na escala 1:50 - é retirado o perímetro e escalonado para o caderno, da seguinte forma:

A seguir, é transferido a planta do telhado para o desenho na nova escala de 1:100. Utilizamos essa planta abaixo para realizar tal transferência:

As linhas horizontais e verticais representam peças de madeira destinadas a execução da sustentação do telhado, o orçamento será baseado tanto na metragem quanto na quantidade dessas peças. As setas representam o sentido da caída do telhado.

O próximo passo é realizar o cálculo da altura do telhado seguindo a inclinação determinada pelo projeto. Nesse caso, como a inclinação pede 15

$$H = DxI$$

onde:

1. - H é a altura procurada;

2. - D a distância do ponto inicial até o ponto onde se deseja encontrar a altura relativa à inclinação desejada;

3. - I é a inclinação desejada;

Observando na planta a medida menor do retângulo é de 7 metros, porém desejamos a altura relativa ao seu ponto médio, nesse caso, D = 3,5 metros. A inclinação dada na segunda imagem da planta é de 15% para a área de cobertura maior, logo, I = 15%. Inserindo os valores na fórmula temos:

$$H = 3,5 \times 15\%$$

que resulta em:

$$H = 0,525m$$

Para as varandas segue-se a mesma linha de raciocínio. Respeitando as medidas relativas das mesmas, e a inclinação, que agora são de:

$$H = 1,9 \times 30\%$$

resultando em:

$$H = 0,57metros$$

.

Existem duas formas de determinar o tamanho das peças, que num triângulo retângulo corresponde à hipotenusa:

1. - Teorema de Pitágoras;

2. - Por Escalonamento.

Pelo Teorema de Pitágoras, que já foi comentado neste trabalho sua aplicação, é feito o seguinte cálculo:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

onde a é o que queremos encontrar;

$$b = 3,5$$

e

$$c = 0,525.$$

Indo aos cálculos temos:

$$a^2 = 3,5^2 + 0,525m^2$$

que resulta em: $a = 3,53m$ por peça.

Na demonstração acima expressamos como definir o tamanho das peças a serem utilizadas na estrutura, dessa forma podemos generalizar esse método para encontrar quaisquer outros tamanhos em diferentes tipos de telhados, desde que se respeite o projeto inicial.

Para determinar a quantidade de peças é necessário respeitar o espaçamento que um determinado tipo de telha pede, nesse projeto iremos utilizar 0,5 m entre cada uma delas. Assim, para calcular a quantidade de peças temos:

$$Q = 12 \div 0,5 = 6$$

peças.

Totalizando 13 peças nas duas caídas do telhado, somado com a cuminheira (peça que passa no centro do telhado entre as duas águas).

Bibliografia

[1] AUSUBEL, D.P.; NOVAK, J.D.; HANESIAN, H. Educational psychology:a cognitive view. New York: Rinehart e Winston Inc., 1968.

[2] MOREIRA. Antônio Marcos, Teorias da aprendizagem, Segunda Ed. São Paulo, Moraes, 1995.

[3] MUNIZ NETO, Antonio Caminha - Tópicos da Matematica Elementar: Geometria plana/ Caminha Muniz Neto. Vol 2 - 1º edição - Rio de Janeiro, 2012.

[4] IEZZI, Gelson, Fundamentos da Matemática Elementar - Geometria Plana. Volume 9 - 7ª Edicao - São Paulo - 1998.